Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Schnellübung 10

---

1. Es sei $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ein Vektorfeld und f eine Funktion. Beweisen Sie die folgenden Identitäten

(a) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = 0$.

(b) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = (0,0,0)$.

(c) $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$, wobei Δ der Laplace-Operator bezeichnet.

(d) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} - (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3),$.

Lösung:

(a) Wir schreiben $\frac{\partial v_i}{\partial x} = \partial_x v_i$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} &= \operatorname{div}\begin{pmatrix}\partial_y v_3 - \partial_z v_2\\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3\\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1\end{pmatrix}\\ &= \partial_x(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) + \partial_y(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) + \partial_z(\partial_x v_2 - \partial_y v_1)\\ &= \frac{\partial^2 v_3}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial y\partial z} = 0.\end{aligned}$$

(b)

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \operatorname{rot}\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\\ \partial_z f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_y\partial_z f - \partial_z\partial_y f\\ \partial_z\partial_x f - \partial_x\partial_z f\\ \partial_x\partial_y f - \partial y\partial_x f\end{pmatrix} = \vec{0},$$

aus dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen.

(c) $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \operatorname{div}\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\\ \partial_z f\end{pmatrix} = \partial_x(\partial_x f) + \partial_y(\partial_y f) + \partial_z(\partial_z f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$

(d)

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} &= \operatorname{rot}\begin{pmatrix}\partial_y v_3 - \partial_z v_2\\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3\\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\partial_y(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) - \partial_z(\partial_z v_1 - \partial_x v_3)\\ \partial_z(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) - \partial_x(\partial_x v_2 - \partial_y v_1)\\ \partial_x(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) - \partial_y(\partial_y v_3 - \partial_z v_2)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\partial_y\partial_x v_2 - \partial_y\partial_y v_1 - \partial_z\partial_z v_1 - \partial_z\partial_x v_3 + (\partial_x\partial_x v_1 - \partial_x\partial_x v_1)\\ \partial_z\partial_y v_3 - \partial_z\partial_z v_2 - \partial_x\partial_x v_2 - \partial_x\partial_y v_1 + (\partial_y\partial_y v_2 - \partial_y\partial_y v_2)\\ \partial_x\partial_z v_1 - \partial_x\partial_x v_3 - \partial_y\partial_y v_3 - \partial_y\partial_z v_2 + (\partial_z\partial_z v_3 - \partial_z\partial_z v_3)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\partial_x(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3)\\ \partial_y(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3)\\ \partial_z(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\partial_x\partial_x v_1 + \partial_y\partial_y v_1 + \partial_z\partial_z v_1\\ \partial_x\partial_x v_2 + \partial_y\partial_y v_2 + \partial_z\partial_z v_2\\ \partial_x\partial_x v_3 + \partial_y\partial_y v_3 + \partial_z\partial_z v_3\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} - \begin{pmatrix}\Delta v_1\\ \Delta v_2\\ \Delta v_3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. (a) Es sei $\vec{v}(x,y,z) = (z-y, x+z, -x-y)$. Berechnen Sie $\operatorname{div}\vec{v}$ und $\operatorname{rot}\vec{v}$.

(b) Es sei $\vec{v}(x,y,z) = (3y, -xz, yz^2)$. Berechnen Sie $\operatorname{div}\vec{v}$ und $\operatorname{rot}\vec{v}$.

(c) Zeigen Sie, dass für zwei differenzierbare Vektorfelder $\vec{w_1}$ und $\vec{w_2}$ gilt:

$$\operatorname{div}(\vec{w_1} \times \vec{w_2}) + \vec{w_1} \cdot \operatorname{rot}\vec{w_2} = \vec{w_2} \cdot \operatorname{rot}\vec{w_1}.$$

Lösung:

(a) $\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z) = 0$ und $\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = (-2,2,2)$.

(b) $\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z) = 2yz$ und $\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = (z^2+x, 0, -z-3)$.

(c) Es seien $\vec{w}_1 = (w_{11}, w_{12}, w_{13})$ und $\vec{w}_2 = (w_{21}, w_{22}, w_{23})$. Die linke Seite ist dann gleich

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\begin{pmatrix} w_{12}w_{23} - w_{22}w_{13} \\ w_{13}w_{21} - w_{11}w_{23} \\ w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ w_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w_{23})_y - (w_{22})_z \\ (w_{21})_z - (w_{23})_x \\ (w_{22})_x - (w_{21})_y \end{pmatrix} \\
&\quad = (w_{12})_x w_{23} - w_{22}(w_{13})_x + (w_{13})_y w_{21} - (w_{11})_y w_{23} + (w_{11})_z w_{22} - (w_{12})_z w_{21},
\end{aligned}$$

die rechte gleich

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} w_{21} \\ w_{22} \\ w_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (w_{13})_y - (w_{12})_z \\ (w_{11})_z - (w_{13})_x \\ (w_{12})_x - (w_{11})_y \end{pmatrix} \\
&\quad = (w_{12})_x w_{23} - w_{22}(w_{13})_x + (w_{13})_y w_{21} - (w_{11})_y w_{23} + (w_{11})_z w_{22} - (w_{12})_z w_{21}.
\end{aligned}$$

3. (a) Gibt es ein Vektorfeld $\vec{v}$ mit $\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = (x,y,z)$?

(b) Gibt es ein Vektorfeld $\vec{w}$, für das

$$\operatorname{rot}\vec{w} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

gilt?

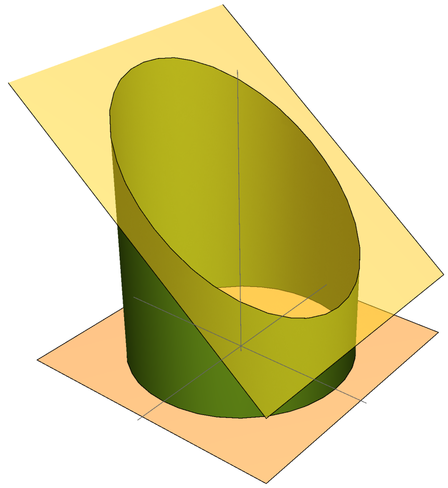
Lösung:

(a) Nein, da $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = 3 \neq 0$ ist.

(b) Ja. Ein mögliches Vektorfeld ist

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

4. Bestimmen Sie die Mantelfläche des Zylinders $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 16\}$ zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 16 - 2x$.



Lösung: Ein Zylinder mit Radius 4 ist parametrisiert durch

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 4\cos u \\ 4\sin u \\ v \end{pmatrix}.$$

Die Ebene $z = 16 - 2x$ schneidet den Zylinder in der Ellipse

$$\{(4\cos u, 4\sin u, 16 - 8\cos u) : 0 \leq u \leq 2\pi\}.$$

Deswegen ist die Parametrisierung des abgesägten Zylindermantels gegeben durch

$$U = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 16 - 8\cos u\}.$$

Zusammen mit

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \left| \begin{pmatrix} -4\sin u \\ 4\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4\cos u \\ 4\sin u \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 4$$

bekommen wir für die Mantelfläche

$$\begin{aligned} A &= \iint_S 1 \mathrm{d}A = \iint_U |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \mathrm{d}v \mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \int_0^{16-8\cos u} 4 \mathrm{d}v \mathrm{d}u \\ &= 4 \int_0^{2\pi} (16 - 8\cos u) \mathrm{d}u = 4\left[16u - 8\sin u\right]_{u=0}^{u=2\pi} = 128\pi. \end{aligned}$$