D-MAVT/D-MATL Analysis II FS 2021
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

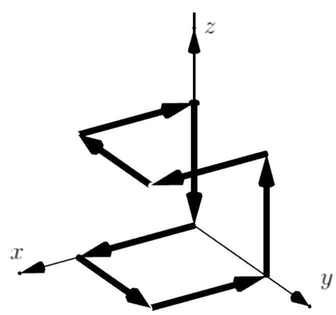
Lösung Schnellübung 11

---

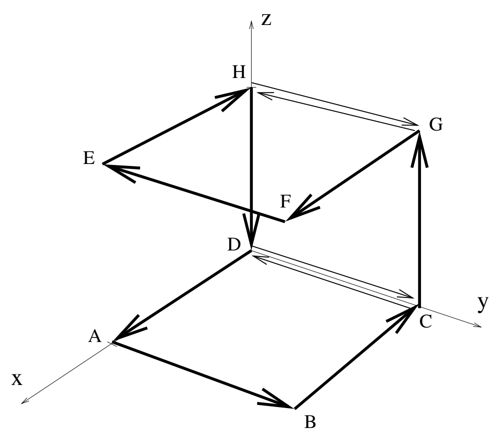
1. Berechnen Sie die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto (yz, xyz, xy)$$

entlang des geschlossenen Weges Γ (siehe Figur) leistet. Die einzelnen Teilabschnitte des Weges Γ haben dabei Länge 1.



Lösung: Wir betrachten die geschlossenen Wege $ABCDA$, $CGHDC$ respektive $GFEHG$.



Das Vektorfeld $\vec{v}$ leistet darauf die Arbeit W_{ABCD}, W_{CGHD} respektive W_{GFEH}. Da die beiden Strecken CD und GH zweimal durchlaufen werden, und zwar in entgegengesetzten Richtungen, gilt

$$W_{tot} = W_{ABCD} + W_{CGHD} + W_{GFEH}.$$

Sei Q_{ABCD} das Quadrat $ABCD$, Q_{CGHD} das Quadrat $CGHD$ und Q_{GFEH} das Quadrat $GFEH$. Nach dem Satz von Stokes gilt

$$W_{tot} = \int_\Gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{Q_{ABCD}} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}A + \iint_{Q_{CGHD}} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}A + \iint_{Q_{GFEH}} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}A.$$

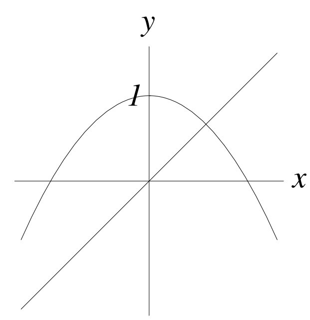
Es gilt $\operatorname{rot}\vec{v}\,(x,y,z) = (x - xy, 0, yz - z)$.
Auf Q_{ABCD} $(z = 0)$ ist $\vec{n} = (0,0,1) \perp \operatorname{rot}\vec{v}\,(x,y,0)$, also $W_{ABCD} = 0$ und auf Q_{CGHD} $(x = 0)$ ist $\vec{n} = (1,0,0) \perp \operatorname{rot}\vec{v}\,(0,y,z)$, also $W_{CGHD} = 0$. Es folgt dann

$$\begin{aligned} W_{tot} &= W_{GFEH} = \iint_{Q_{GFEH}} \operatorname{rot}\vec{v} \cdot \vec{n}\mathrm{d}O \\ &\overset{z=1}{=} \int_0^1 \int_0^1 (x - xy, 0, y - 1) \cdot (0,0,-1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (1 - y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Für $a > 0$ sei P_a die Parabel mit Achse y und Scheitelpunkt $(0,1)$, die durch den Punkt (a,a) geht. Sei γ_a der Weg von $(0,1)$ nach (a,a) entlang P_a. Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass die Arbeit des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x,y) \longmapsto \left(\frac{y-1}{x}, \frac{-1}{x}\right)$$

entlang γ_a minimal wird.



Lösung: Eine Parabel mit Achse y und Scheitel $(0,1)$ hat die Form $y = cx^2 + 1$. Soll sie durch den Punkt (a,a) gehen, so folgt $c = \frac{a-1}{a^2}$. Eine Parametrisierung des Weges W_a ist durch

$$\vec{r}(t) = \left(t, \frac{a-1}{a^2}t^2 + 1\right), \quad 0 \le t \le a$$

gegeben. Für die Arbeit $W(a)$ längs γ_a erhält man dann

$$\begin{aligned} W(a) &= \int_{\gamma_a} \vec{v}\boldsymbol{\cdot}\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^a \vec{v}\big(\vec{r}(t)\big)\boldsymbol{\cdot}\dot{\vec{r}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \left(\frac{a-1}{a^2}t, -\frac{1}{t}\right)\boldsymbol{\cdot}\left(1, 2\frac{(a-1)}{a^2}t\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a-1}{a^2}\int_0^a (t-2)\,dt = \frac{a-1}{a^2}\left(\frac{a^2}{2} - 2a\right) = \frac{a^2 - 5a + 4}{2a}\quad. \end{aligned}$$

Man sucht nun das Minimum der Funktion $W(a)$ im offenen Intervall $(0, +\infty)$. Extremale Punkte findet man mit Hilfe der Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}W(a) = \frac{(2a-5)2a - 2(a^2 - 5a + 4)}{4a^2} = \frac{2a^2 - 8}{4a^2} = 0 \iff a^2 = 4.$$

Man erhält im Intervall $(0, +\infty)$ die Lösung $a = 2$. Man beachte noch, dass $W(a) \to +\infty$ für $a \to 0^+$ resp. $a \to +\infty$. Also ist in $a = 2$ das Minimum mit $W(2) = -\frac{1}{2}$.

3. (a) Berechnen Sie das Integral

$$\Phi = \int\int_S \operatorname{rot}\vec{v} \cdot \vec{n}dA,$$

wobei $\vec{v}(x,y,z) = (yz, -xz, xy)$ ist und

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 8z^2 = 1, z \ge 0\}$$

einen Teil der Oberfläche eines Ellipsoids bezeichnet. Die Normale zeigt auf S nach oben. Gehen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes zu einer Fläche $\widetilde{S}$ über, welche für die Berechnung des Integrals günstiger ist.

(b) Benutzen Sie den Satz von Stokes, um Φ via Wegintegral zu berechnen.

Lösung:

(a) $\widetilde{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ mit Normale $\vec{m} = (0, 0, 1)$. Mit Stokes

$$\int\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int\int_{\widetilde{S}} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{m} dA.$$

Es gilt $\operatorname{rot} \vec{v} = (2x, 0, -2z)$ und so

$$\int\int_{\widetilde{S}} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{m} dA = -2 \int\int_{\widetilde{S}} z dA = 0,$$

denn $z \equiv 0$ auf $\widetilde{S}$.

(b) Der Rand von S ist der Einheitskreis in der xy-Ebene, der für die Anwendung des Satzes von Stokes im Gegenuhrzeigersinn orientiert ist. Eine Parametrisierung ist also

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}\Phi &= \int\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (0, 0, \cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = 0\end{aligned}$$