D-MAVT/D-MATL
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Analysis II

FS 2021

Lösung Schnellübung 12

---

1. (a) Bestimmen Sie ein ebenes Vektorfeld $v(x,y)$, welches als Feldlinien alle Kreise mit Mittelpunkt in $(1,1)$ besitzt.

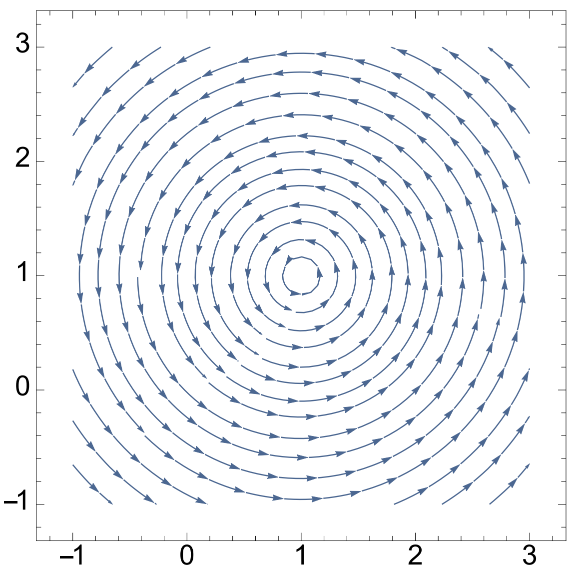
(b) Die Feldlinien des Vektorfelds $w(x,y) := (x, y+1)$ sind für $x \neq 0$ Graphen von Lösungen einer Differentialgleichung. Wie lautet diese Differentialgleichung? Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

Lösung: Wir bestimmen die Feldlinien unter der Annahme, dass sie durch eine Funktion $y(x)$ gegeben sind.

(a) Die Kreise mit Mittelpunkt $(1,1)$ sind gegeben durch

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2,$$

für den Radius $r > 0$ (das ist ein freier Parameter).



Wenn das die Feldlinien einer Differentialgleichung sind, so schreiben wir $y = y(x)$ und leiten nach x ab, das ergibt

$$2(x-1) + 2(y-1)y' = 0,$$

also

$$y' = -\frac{x-1}{y-1}.$$

Ein mögliches Vektorfeld ist also $v(x,y) := (1-y, x-1)$, oder jedes Vielfache davon.

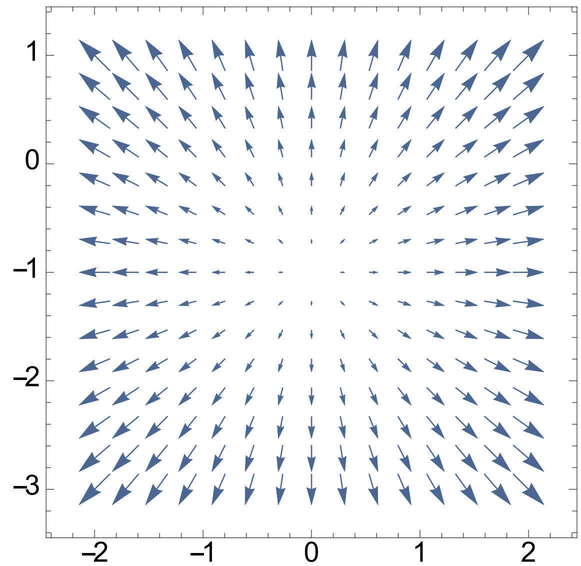
(b) Beschreibt die Funktion $y(x)$ die Feldlinien, so muss gelten $y' = \frac{w_2(x,y)}{w_1(x,y)} = \frac{y+1}{x}$. Diese Differentialgleichung ist separierbar, und zwar zu

$$\frac{y'}{y+1} = \frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y+1}dy = \int \frac{1}{x}dx,$$

also $\ln|y+1| = \ln|x| + C = \ln|x| + \ln e^C = \ln(e^C|x|)$. Aufgelöst nach y ergibt dies

$$y = \pm e^C x - 1,$$

für einen Parameter C, das sind also alle Geraden durch den Punkt $(0, -1)$.



2. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

(a) $y' = e^y \sin(x)$.

(b) $y' = xy^2 + x$.

Lösung:

(a) Die Differentialgleichung ist separierbar.

$$e^{-y}y' = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \int e^{-y}dy = \int \sin(x)dx \Leftrightarrow -e^{-y} = -\cos(x) + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$. Nach y ausgelöst ergibt sich

$$y = -ln(\cos x + c), \quad (c = -C).$$

Die Funktion $\ln(x)$ ist nur auf $(0, \infty)$ definiert, also muss es $c > -\cos x$ gelten. Für $c > 1$ ist es immer der Fall und der Definitionsbereich der Lösungskurve y ist ganz $\mathbb{R}$.
Wenn $c \leq -1$, dann gilt $c \leq -1 \leq -\cos x$ und es gibt keine solche Lösungskurve. Für $c \in [-1, 1]$ ist die Lösungskurve durch den Punkt (x_0, y_0) auf einem Intervall von $\mathbb{R}$ (das x_0 enthält) definiert.

(b) Die Differential gleichung ist separierbar.

$$\frac{y'}{1+y^2} = x \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int xdt \Leftrightarrow \arctan(y) = \frac{x^2}{2} + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$. Nach y ausgelöst ergibt sich

$$y(x) = \tan(\frac{x^2}{2} + C).$$

Für jedes C ist die Lösungskurve $y(x) = \tan(\frac{x^2}{2} + C)$ auf $\mathbb{R} \setminus \{2(n+1)\pi - C \mid n \in \mathbb{N}\}$ definiert. (Es muss $\frac{x^2}{2} + C \neq (n + \frac{1}{2})\pi \ \forall n \in \mathbb{N}$ gelten).

3. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Schar der Kreise, welche die x-Achse im Ursprung berühren, die Differentialgleichung

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

erfüllt. Nun sollte der umgekehrte Weg beschritten werden. Lösen Sie also diese Differentialgleichung und weisen Sie nach, dass das Resultat tatsächlich wieder den oben beschriebenen Kurvenschar entspricht.
Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $v = \frac{y}{x}$.

Lösung: Mit der Susbtitution $v = \frac{y}{x}$, d.h. $y = vx$ haben wir $y' = xv' + v$. Einsetzen in die Differentialgleichung gibt

$$v'x + v = \frac{2v}{1 - v^2}.$$

Diese Gleichung ist separierbar. Es gilt

$$\int \frac{1 - v^2}{v + v^3} dv = \ln \frac{|v|}{1 + v^2} + C$$

und somit

$$\ln \frac{|v|}{1 + v^2} = \ln |x| + D.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{v}{1 + v^2} = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Wir substituiren $v = \frac{y}{x}$ zurück und erhalten

$$y = C(x^2 + y^2).$$

Mittels quadratische Ergänzung dies wird

$$x^2 + (y - \frac{1}{2C})^2 = \left(\frac{1}{2C}\right)^2,$$

was genau ein Kreis mit Radius $\frac{1}{2|C|}$ um $(0, \frac{1}{2C})$ entspricht.