D-MAVT/D-MATL Analysis II FS 2021
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

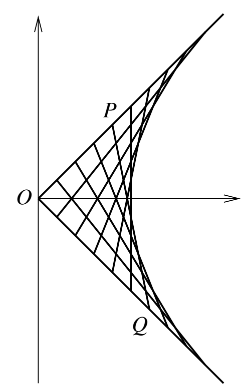
Lösung Schnellübung 13

---

1. Seien P und Q Punkte auf den Winkelhalbierenden des ersten bzw. zweiten Quadranten. Berechnen Sie die Enveloppe der Schar der Geraden $\overline{PQ}$, für die die Summe der Längen

$$PO + QO = 2\sqrt{2}$$

ist. (O ist der Koordinatenursprung.)



Lösung: Mit $P = (p,p)$ und $Q = (q,-q)$ ergibt sich aus der Bedingung $PO + QO = 2\sqrt{2} = \sqrt{2}(p+q)$ die Beziehung $q = 2-p$. Eine Parameterdarstellung der Geraden durch P und Q ist gegeben durch

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} q-p \\ -q-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + t(2-2p) \\ p-2t \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man $t = \frac{p-y}{2}$ und in der ersten Gleichung eingesetzt, ergibt sich

$$x = p + \frac{p-y}{2}(2-2p) \quad \text{oder} \quad 0 = p - x - (p-y)(p-1) =: F(x,y,p).$$

Aus der Enveloppenbedingung $F_p = 1 - (p-1) - (p-y) = 0$ folgt $p = \frac{y+2}{2} = \frac{y}{2} + 1$. Einsetzen dieses Ausdruckes in der Gleichung $F(x,y,p) = 0$ führt zu

$$\frac{y}{2} + 1 - x - (1 - \frac{y}{2})\frac{y}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1.$$

Dies ist eine Parabel. Wegen $0 \le p \le 2$ folgt aus $p = \frac{y}{2} + 1$ noch $-2 \le y \le 2$. Die Enveloppe ist also der Parabelbogen

$$x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1 \quad -2 \le y \le 2.$$

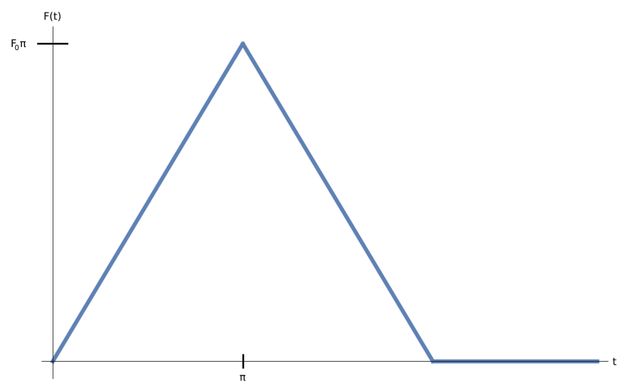
2. Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblem

$$u'' + u = F(t)$$
$$u(0) = u'(0) = 0,$$

wobei F_0 eine Konstante ist und

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t, & 0 \le t < \pi \\ F_0(2\pi - t), & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi. \end{cases}$$

Hinweis: $t \mapsto \cos t$ und $t \mapsto \sin t$ lösen die zugehörige homogene Differentialgleichung.



Lösung: Um die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zu bestimmen, müssen wir sie stückweise im Inneren der drei Definitionsintervalle von F. Dann benutzen wir die Differenzierbarkeit der Lösung u, um die Stücklösungen zusammenzukleben.

In jedem Stuck der Definition von F ist die Lösung der homogenen Gleichung

$$u_h(t) = A\,\cos t + B\,\sin t$$

(denn $\cos t$ und $\sin t$ zwei unabhängige Lösungen sind). Für die partikuläre Lösung haben wir in den verschiedenen Stücken:

- In $(0,\,\pi)$: mit dem Ansatz $u_p(t) = \alpha t + \beta$ kann man leicht überprüfen, dass $u_p(t) = F_0 t$ die Gleichung löst.
- In $(\pi,\,2\pi)$: analog folgt $u_p(t) = F_0(2\pi - t)$.
- In $(2\pi,\,\infty)$ ist die Gleichung homogen.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung muss also der Gestalt

$$u(t) = \begin{cases} A_1\,\cos t + B_1\,\sin t + F_0 t, & \text{wenn } 0 < t < \pi \\ A_2\,\cos t + B_2\,\sin t + F_0(2\pi - t), & \text{wenn } \pi < t < 2\pi \\ A_3\,\cos t + B_3\,\sin t, & \text{wenn } t > 2\pi \end{cases}$$

sein, für Konstanten A_i, B_i. Da die Funktion $u:\,[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tatsächlich die Gleichung löst, muss sie mindestens zweimal differenzierbar sein. Insbesondere sind u und die Ableitung u' stetige Funktionen. Dies bestimmt die Konstanten A_2, B_2, A_3, B_3 als Funktionen von A_1 und B_1:

- Zuerst berechnen wir die Ableitung u':

$$u'(t) = \begin{cases} -A_1\,\sin t + B_1\,\cos t + F_0, & \text{wenn } 0 < t < \pi \\ -A_2\,\sin t + B_2\,\cos t - F_0, & \text{wenn } \pi < t < 2\pi \\ -A_3\,\sin t + B_3\,\cos t, & \text{wenn } t > 2\pi. \end{cases}$$

- Aus der Stetigkeit von u und u' an der Stelle $t = \pi$ folgt:

$$-A_1 + F_0\pi = \lim_{t\to\,\pi^-} u(t) = \lim_{t\to\,\pi^+} u(t) = -A_2 + F_0\pi,\ \text{bzw.}$$

$$-B_1 + F_0 = \lim_{t\to\,\pi^-} u'(t) = \lim_{t\to\,\pi^+} u'(t) = -B_2 - F_0.$$

  Deshalb sind $A_1 = A_2$ und $B_2 = B_1 - 2F_0$.

- Aus der Stetigkeit von u und u' an der Stelle $t = 2\pi$ folgt:

$$A_2 = \lim_{t \to 2\pi^-} u(t) = \lim_{t \to 2\pi^+} u(t) = A_3, \text{ bzw.}$$

$$B_2 - F_0 = \lim_{t \to 2\pi^-} u'(t) = \lim_{t \to 2\pi^+} u'(t) = B_3.$$

  Deshalb sind $A_3 = A_2 = A_1$ und $B_3 = B_2 - F_0 = B_1 - 3F_0$.

Wir erhalten also:

$$u(t) = \begin{cases} A_1 \cos t + B_1 \sin t + F_0 t, & \text{wenn } 0 < t < \pi \\ A_1 \cos t + (B_1 - 2F_0) \sin t + F_0(2\pi - t), & \text{wenn } \pi \leq t < 2\pi \\ A_1 \cos t + (B_1 - 3F_0) \sin t, & \text{wenn } t \geq 2\pi. \end{cases}$$

Man soll bemerken, hier wurde wegen Stetigkeit von u auch $u(\pi) := \lim_{t \to \pi^-} u(t) = \lim_{t \to \pi^+} u(t)$ definiert. Analog wurde auch $u(2\pi)$ definiert.

Wir wenden jetzt die Anfangsbedingungen, um A_1 und B_1 zu bestimmen und somit unser Anfangswertproblem zu lösen:

- $0 = u(0) = \lim_{t \to 0^+} u(t) = A_1$.
- $0 = u'(0) = \lim_{t \to 0^+} u'(t) = B_1 + F_0$.

Die Lösung des Anfangswertproblemes ist dann:

$$u(t) = \begin{cases} -F_0 \sin t + F_0 t, & \text{wenn } 0 \leq t < \pi \\ -3F_0 \sin t + F_0(2\pi - t), & \text{wenn } \pi \leq t < 2\pi \\ -4F_0 \sin t, & \text{wenn } t \geq 2\pi. \end{cases}$$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differtialgleichung

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Hinweis: $y_1(x) = \cos(x)$ und $y_2(x) = \sin(x)$ lösen die zugehörige homogene Differentialgleichung.

Lösung: $y_1(x) = \cos(x)$ und $y_2(x) = \sin(x)$ sind zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung $y'' + y = 0$.

Die Wronski-Determinante ist

$$W = \det \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = 1.$$

Also

$$C_1(x) = -\int \frac{1}{\cos x} \sin x \, \mathrm{d}x = \ln(\cos x) + K_1,$$
$$C_2(x) = \int \frac{1}{\cos x} \cos x \, \mathrm{d}x = x + K_2,$$

$K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet somit

$$y(x) = (\ln(\cos x) + K_1) \cos x + (x + K_2) \sin x = \underbrace{\ln(\cos x) \cos x + x \sin x}_{\text{partikuläre Lösung}} + \underbrace{K_1 \cos x + K_2 \sin x}_{\text{allgemeine Lösung}},$$

$K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.