Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Schnellübung 8

---

1. Aus einer Funktion einer Variablen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $\rho \mapsto f(\rho)$, entsteht durch Einsetzen von $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ die Funktion dreier Variablen

$$\widetilde{f}\colon (x,y,z) \mapsto f\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\big).$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{grad}\,\widetilde{f} = \frac{f'(\rho)}{\rho}\cdot\vec{\rho}$$

gilt, wobei $\vec{\rho} = (x,y,z)$ ist.

(b) Bestimmen Sie f derart, dass $f(1) = 0$ und

$$\operatorname{grad}\,\widetilde{f} = \frac{\vec{\rho}}{\rho^5}$$

gilt.

Lösung:

(a) Man berechnet

$$\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{f} = \frac{\partial}{\partial x} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{d}{d\rho} f(\rho)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = f'(\rho)\frac{x}{\rho}$$

und analog für die anderen Komponenten von grad $\widetilde{f}$. Die Behauptung folgt unmittelbar.

(b) Aus (a) muss also

$$\frac{f'(\rho)}{\rho} = \frac{1}{\rho^5} \quad \text{mit} \quad f(1) = 0$$

gelten. Integrieren führt zu $f(\rho) = -\dfrac{1}{3\rho^3} + c$, und aus $f(1) = 0$ folgt schliesslich

$$f(\rho) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\rho^3}.$$

2. Auf der Fläche $F = \{(x,y,z) | x^2+y^2-z^2 = 1\}$ liegen die beiden Geraden

$$g_1 : s \longmapsto (-1, s, -s) \qquad \text{und} \qquad g_2 : t \longmapsto (t, 1, t)\,, \quad -\infty < s,t < \infty.$$

Die Geraden g_1 und g_2 schneiden sich in einem Punkt P auf der Fläche. Berechnen Sie P und die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkt P.

Lösung: Man berechnet den Schnittpunkt aus

$$(-1,\, s,\, -s) = (t,\, 1,\, t)\,.$$

Es folgt $t = -1$, $s = 1$; also $P = (-1,1,-1)$. Die Gleichung der Tangentialebene im Punkt (x_0,y_0,z_0) ist gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0,$$

wobei in dem Fall f ist durch $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1$ gegeben. Es ergibt sich

$$2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) - 2z_0(z-z_0) = 0,$$

also $-x+y+z-1 = 0$.

3. Finden Sie die lokale Extrema der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf dem Einheitskreis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und geben Sie an, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt.

(a) $f(x, y) = x + y$.

(b) $f(x, y) = xy$.

(c) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$.

Lösung: Sei $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1$, so ist S^1 eine Niveaulinie von g und es gilt $\operatorname{grad} g = (2x, 2y)$. Nach dem Satz der Lagrange-Multiplikatoren es existiert für jede lokale Extremalstelle (x, y) von $f|_{S^1}$ mit $\operatorname{grad} g(x, y) \neq (0, 0)$ ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y).$$

(a) Für $f(x, y) = x + y$ gilt es $\operatorname{grad} f = (1, 1)$ und für die Extremalstellen von f erhalten wir das folgende Gleichungssystem

$$\begin{cases} 1 = 2x\lambda & (1) \\ 1 = 2y\lambda & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3). \end{cases}$$

Aus (1), (2) folgt es $x, y, \lambda \neq 0$ und auch $x = \frac{1}{2\lambda} = y$. Mit (3) erhalten wir

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

und so die mögliche Extremalstellen sind $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ und $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Es gilt

$$f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} \text{ und } f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}.$$

Das Maximum von $f|_{S^1}$ beträgt also $\sqrt{2}$ und wird im Punkt $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ angenommen. Das Minimum von $f|_{S^1}$ beträgt also $-\sqrt{2}$ und wird im Punkt $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ angenommen.

(b) Für $f(x, y) = xy$ gilt es $\operatorname{grad} f(x, y) = (y, x)$ und für die Extremalstellen von f erhalten wir das folgende Gleichungssystem

$$\begin{cases} y = 2x\lambda & (1) \\ x = 2y\lambda & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3). \end{cases}$$

Falls $y = 0$, dann folgt aus (2), dass $x = 0$, was $\operatorname{grad} g(x, y) \neq (0, 0)$ widerspricht. So $x, y, \lambda \neq 0$. Mit (1) und (2) erhalten wir

$$y = (2\lambda)^2 y \overset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} 4\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2},$$

Dann (1) und (3) geben

$$\begin{cases} y = \pm x, \\ 1 = x^2 + 4\lambda^2 x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + 4\lambda^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Die mögliche Extremalstellen sind somit

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Wir vergleichen die Werte von f an diesen Stellen.

(x,y)	$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$
$f(x,y)=xy$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Das Maximum von $f|_{S^1}$ beträgt also $\frac{1}{2}$ und wird in den Punkten $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ angenommen.
Das Minimum von $f|_{S^1}$ beträgt also $-\frac{1}{2}$ und wird in den Punkten $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2})$ angenommen.

(c) Für $f(x,y)=2x^2+3y^2$ gilt es $\operatorname{grad} f(x,y)=(4x,6y)$ und für die Extremalstellen von f erhalten wir das folgende Gleichungssystem

$$\begin{cases} 4x = 2x\lambda & (1) \\ 6y = 2y\lambda & (2) \\ x^2+y^2=1 & (3). \end{cases}$$

Falls $x=0$, dann ist $y=\pm1$ (und $\lambda=3$) und falls $y=0$, dann ist $x=\pm1$ (und $\lambda=2$). So seien beide $x,y\neq0$. Dann aus (1) und (2) folgt

$$2 \overset{(1)}{=} \lambda \overset{(2)}{=} 3,$$

was nicht möglich ist. Die mögliche Extremalstellen von f sind somit

$$(0,\pm1),(\pm1,0).$$

Wir vergleichen die Werte von f an diesen Stellen.

(x,y)	$(0,1)$	$(0,-1)$	$(1,0)$	$(-1,0)$
$f(x,y)=2x^2+3y^2$	3	3	2	2

Das Maximum von $f|_{S^1}$ beträgt also 3 und wird in den Punkten $(0,\pm1)$ angenommen.
Das Minimum von $f|_{S^1}$ beträgt also 2 und wird in den Punkten $(\pm1,0)$ angenommen.