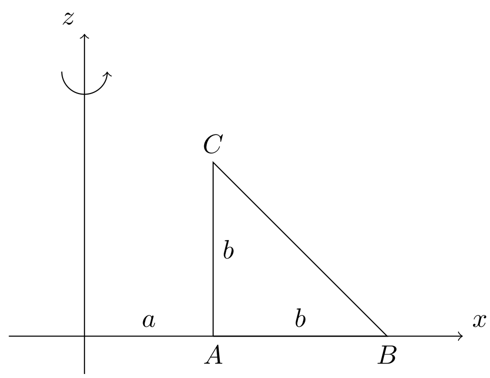
Lösung Schnellübung 9

---

1. Berechnen Sie das Trägheitsmoment um die z-Achse des homogenen Ringes (Dichte $\theta = 1$), der durch Rotation des Dreiecks ABC um die z-Achse entsteht (siehe untenstehende Figur).



Lösung: Das Trägheitsmoment ist gegeben durch $J = \int\int\int_V x^2 + y^2 dV$. Wir berechnen das Integral mit den Zylinderkoordinaten. Die Gerade durch B und C ist gegeben durch $g(x) = a + b - x$, daraus folgt

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{2\pi} \int_a^{a+b} \int_0^{a+b-\rho} \rho^2 \cdot \rho dz d\rho d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_a^{a+b} (a+b-\rho)\rho^3 d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{(a+b)\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5} \right]_{\rho=a}^{\rho=a+b} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(a+b)^5}{4} - \frac{(a+b)^5}{5} - \frac{(a+b)a^4}{4} + \frac{a^5}{5} d\varphi \\
&= 2\pi \left(\frac{(a+b)^5}{20} - \frac{a^5}{20} - \frac{a^4 b}{4} \right) = \pi \left(\frac{ab^4}{2} + a^2b^3 + a^3b^2 + \frac{b^5}{10} \right).
\end{aligned}$$

2. Berechnen Sie

$$\int\int_D e^{-(x^2+y^2)} dF,$$

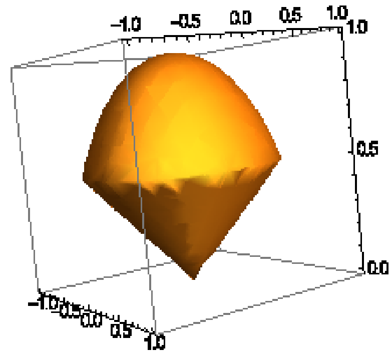
wobei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ den Einheitskreis bezeichnet.

Lösung: Wir rechnen in Polarkoordinaten, setzen also $x = \rho\cos\varphi$ und $y = \rho\sin\varphi$ für $0 \leq \rho \leq 1$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Das Flächenelement berechnet sich dann als $\mathrm{d}F = \rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho$ und das gesuchte Integral ist gleich

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho e^{-\rho^2} \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^1 r e^{-\rho^2} \,\mathrm{d}\rho = -\pi \int_0^1 -2\rho e^{-\rho^2} \,\mathrm{d}\rho = -\pi \left[e^{-\rho^2} \right]_0^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

3. Bestimmen Sie das Volumen der Eistüte, welche durch den Kegel $x^2+y^2=3z^2$ und die Sphäre $x^2+y^2+z^2=1$ beschränkt wird und sich oberhalb der xy-Ebene befindet.

Lösung: $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0, x^2+y^2\le 3z^2\}$



Die beiden Flächen treffen sich bei

$$3z^2=x^2+y^2=1-z^2 \quad\Rightarrow\quad 4z^2=1 \quad\Rightarrow\quad z=\pm\frac{1}{2}.$$

Variante mit Kugelkoordinaten $(x,y,z)=(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(V)&=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} r^2\sin\theta\,d\theta d\varphi dr = 2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1[-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{3}}\\&=2\pi\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Variante mit Zylinderkoordinaten $(x,y,z)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)$: Setze

$$\begin{aligned}V_1&=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\frac{1}{2}, 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\rho\le\sqrt{3}\,z\}\\V_2&=\{(x,y,z)\,|\,\frac{1}{2}\le z\le 1, 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\rho\le\sqrt{1-z^2}\}\end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(V_1)&=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}\,z}\rho\,d\rho d\varphi dz=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}3z^2\,dz=\frac{\pi}{8}\\\mathrm{Vol}(V_2)&=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\rho\,d\rho d\varphi dz=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-z^2)\,dz=\pi\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 8}\right)\right)=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{3\cdot 8}\right)\\\mathrm{Vol}(V)&=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{3\cdot 8}+\frac{1}{8}\right)=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3\cdot 8}\right)=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$