D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2021
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Schnellübung 10

---

1. Es sei $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ein Vektorfeld und f eine Funktion. Beweisen Sie die folgenden Identitäten

(a) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = 0$.

(b) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = (0,0,0)$.

(c) $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$, wobei Δ der Laplace-Operator bezeichnet.

(d) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} - (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3),$.

2. (a) Es sei $\vec{v}(x,y,z) = (z-y, x+z, -x-y)$. Berechnen Sie $\operatorname{div}\vec{v}$ und $\operatorname{rot}\vec{v}$.

(b) Es sei $\vec{v}(x,y,z) = (3y, -xz, yz^2)$. Berechnen Sie $\operatorname{div}\vec{v}$ und $\operatorname{rot}\vec{v}$.

(c) Zeigen Sie, dass für zwei differenzierbare Vektorfelder $\vec{w_1}$ und $\vec{w_2}$ gilt:

$$\operatorname{div}(\vec{w_1} \times \vec{w_2}) + \vec{w_1} \cdot \operatorname{rot}\vec{w_2} = \vec{w_2} \cdot \operatorname{rot}\vec{w_1}.$$

3. (a) Gibt es ein Vektorfeld $\vec{v}$ mit $\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = (x,y,z)$?

(b) Gibt es ein Vektorfeld $\vec{w}$, für das

$$\operatorname{rot}\vec{w} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

gilt?

4. Bestimmen Sie die Mantelfläche des Zylinders $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 16\}$ zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 16 - 2x$.