Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Schnellübung 8

1. Aus einer Funktion einer Variablen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $\rho \mapsto f(\rho)$, entsteht durch Einsetzen von $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ die Funktion dreier Variablen

$$\widetilde{f}\colon (x,y,z) \mapsto f\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\big).$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{grad} \widetilde{f} = \frac{f'(\rho)}{\rho} \cdot \vec{\rho}$$

gilt, wobei $\vec{\rho} = (x,y,z)$ ist.

(b) Bestimmen Sie f derart, dass $f(1) = 0$ und

$$\operatorname{grad} \widetilde{f} = \frac{\vec{\rho}}{\rho^5}$$

gilt.

2. Auf der Fläche $F = \{(x,y,z) | x^2+y^2-z^2 = 1\}$ liegen die beiden Geraden

$$g_1 : s \longmapsto (-1, s, -s) \qquad \text{und} \qquad g_2 : t \longmapsto (t, 1, t)\,, \quad -\infty < s, t < \infty.$$

Die Geraden g_1 und g_2 schneiden sich in einem Punkt P auf der Fläche. Berechnen Sie P und die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkt P.

3. Finden Sie die lokale Extrema der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf dem Einheitskreis $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ und geben Sie an, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt.

(a) $f(x,y) = x + y$.

(b) $f(x,y) = xy$.

(c) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$.