D-MAVT/D-MATL
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 14

MC-Aufgaben

1. Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung

(a) der minimalen partiellen Ableitung.

(b) entgegengesetzt zur maximalen partiellen Ableitung.

(c) des Gradienten.

√ (d) entgegengesetzt zum Gradienten.

(e) orthogonal zum Gradienten.

Lösung: Die Frage ist äquivalent dazu, für welchen Einheitsvektor $\vec{e}$ die Richtungsableitung $D_{\vec{e}}f$ am kleinsten, das heisst, am meisten negativ ist. Die Richtungsableitung ist aber gleich $\vec{e}\cdot(\operatorname{grad}(f))$, und dies wird am kleinsten für $\vec{e} = -\operatorname{grad}(f)/|\operatorname{grad}(f)|$. Nämlich:

$$\vec{e}\cdot(\operatorname{grad}(f)) = 1|(\operatorname{grad}(f))|\cos(\sphericalangle(\vec{e}, \operatorname{grad}(f)))$$

und so nimmt den kleinsten Wert, falls $\cos(\sphericalangle(\vec{e}, \operatorname{grad}(f))) = -1$, das heisst, $\sphericalangle(\vec{e}, \operatorname{grad}(f)) = \pi$. Das gilt für $\vec{e} = -\operatorname{grad}(f)/|\operatorname{grad}(f)|$. Die richtige Antwort lautet daher (d).

2. Gegeben ist die Funktion $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Kugeln mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

(b) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Ebenen senkrecht zum Vektor $(1, 3, 1)$.

√ (c) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Ellipsoiden mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

Lösung: Die Niveaufläche von f zum Niveau C ist die Menge

$$N_C(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = C\}.$$

Für $C \in \mathbb{R}^+_*$ ist also ein Ellipsoid mit Mittelpunkt O, für $C = 0$ ist die Menge $\{(0, 0, 0)\}$, und sonst ist die leere Menge.

3. Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y,z) = x^2+y+z^3$ an der Stelle $(1,2,2)$ in Richtung des Einheitsvektors $\frac{1}{3}(2,2,1)$.

(a) $\dfrac{34}{3}$

√ (b) 6

(c) $(2,1,12)$

(d) $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 4)$

Lösung: Der Gradient grad $f(x,y,z) = (2x,1,3z^2)$ hat im Punkt $(1,2,2)$ den Wert $(2,1,12)$. Somit ist die fragliche Richtungsableitung $D_e f(1,2,2) = \frac{1}{3}(2,2,1)\cdot(2,1,12) = \frac{1}{3}(2\cdot2+2\cdot1+1\cdot12) = 6$. Also ist (b) die richtige Antwort.

4. Bestimmen Sie jene Tangentialebenen an das Ellipsoid

$$2x^2 + 2y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1,$$

welche parallel zur Ebene $x+y+z=1$ sind.

(a) $x+y+z=0$.

(b) $x+y+z=k$, für $k \in \{\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\}$.

√ (c) $x+y+z=k$, für $k \in \{\pm\sqrt{5}\}$.

(d) $x+y+z=k$, für $k \in \{\pm1\}$.

Lösung: Wir suchen die Punkte auf dem Ellipsoid, bei denen der Gradient parallel zum Normalenvektor $(1,1,1)$ der Ebene ist. Setzen wir

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + \frac{z^2}{4},$$

so müssen wir also grad $f(x,y,z) = \left(4x, 4y, \frac{z}{2}\right) = a\,(1,1,1)$ mit einer reellen Zahl a verlangen.

Es folgt, dass

$$x = y = \frac{a}{4}\ ,\ z = 2a$$

ist. Einsetzen in die Gleichung des Ellipsoiden führt dann zu

$$1 = f(x,y,z) = \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{8} + a^2 = \frac{5}{4}\,a^2 \quad\Longrightarrow\quad a_\pm = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Die gesuchten Tangentialebenen müssen die Gleichung $x+y+z=b$ mit $b \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit sie parallel zur Ebene $x+y+z=1$ sind. Da sie

$$(x,y,z) = \left(\frac{a_+}{4}, \frac{a_+}{4}, 2a_+\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

bzw.

$$(x,y,z) = \left(\frac{a_-}{4}, \frac{a_-}{4}, 2a_-\right) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

enthalten müssen, finden wir durch Einsetzen die Werte $b_\pm = \pm\sqrt{5}$. Die Tangentialebenen sind also

$$x+y+z=\sqrt{5} \quad \text{und} \quad x+y+z=-\sqrt{5}.$$

Offene Aufgaben

5. Sei

(a) $z(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ und $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$.

(b) $z(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ und $x(t) = e^{-t}$, $y(t) = e^t$.

Berechnen Sie die Ableitung $\frac{dz}{dt}$ durch die verallgemeinerte Kettenregel. Prüfen Sie Ihr Resultat durch explizites Ableiten von $z(x(t), y(t))$ nach t.

Lösung: Die partiellen Ableitungen von $z(x,y)$ sind $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = 10y + 3x$. Also erhalten wir für

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial z}{\partial y}\dot{y}(t) \\
&= (2x(t) + 3y(t))\dot{x}(t) + (10y(t) + 3x(t))\dot{y}(t) \\
&= 2\sin(t)\cos(t) + 3\cos^2(t) - 10\cos(t)\sin(t) - 3\sin^2(t) \\
&= 3 - 6\sin^2(t) - 8\sin(t)\cos(t) && \mid \text{da } \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) \\
&= 3 - 6\sin^2(t) - 4\sin(2t).
\end{aligned}$$

Ohne die Kettenregel: $z(t) = z\big(x(t), y(t)\big) = \sin^2(t) + 3\sin(t)\cos(t) + 5\cos^2(t)$ und erhalten für $\frac{dz}{dt} = 2\sin(t)\cos(t) + 3\cos^2(t) - 3\sin^2(t) - 10\sin(t)\cos(t) = 3 - 6\sin^2(t) - 4\sin(2t)$.

Die partiellen Ableitungen von $z(x,y)$ sind $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$. Also erhalten wir für

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial z}{\partial y}\dot{y}(t) \\
&= \frac{2x(t)}{x^2(t) + y^2(t)}\dot{x}(t) + \frac{2y(t)}{x^2(t) + y^2(t)}\dot{y}(t) \\
&= 2\frac{-e^{-2t} + e^{2t}}{e^{-2t} + e^{2t}} && \mid \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2},\ \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\
&= 2\frac{\sinh(2t)}{\cosh(2t)}.
\end{aligned}$$

Ohne die Kettenregel: $z(t) = z\big(x(t), y(t)\big) = \ln(e^{2t} + e^{-2t}) = \ln(2\cosh(2t))$ und erhalten, da $\dot{\cosh}(t) = \sinh(t)$, für $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2\cosh(2t)} 4\sinh(2t) = 2\frac{\sinh(2t)}{\cosh(2t)}$.

6. Eine Funktion von drei Variablen $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ besitzt im Ursprung in den drei Richtungen

$$\vec{a} = (1,0,0), \quad \vec{b} = \Big(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\Big), \quad \vec{c} = \Big(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big)$$

die Richtungsableitungen

$$D_{\vec{a}}f(0) = 3\,, \quad D_{\vec{b}}f(0) = -2\,, \quad D_{\vec{c}}f(0) = 5\,.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Niveaufläche von f im Ursprung.

Lösung:

Die Richtungsableitung in Richtung $\vec{a}$ berechnet sich

$$D_{\vec{a}}f = \operatorname{grad} f \cdot \vec{a},$$

wobei $\vec{a}$ ein Einheitsvektor sein muss. Dies führt in unserem Fall zu einem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
D_{\vec{a}}f(0) &= 3 = f_x(0) \\
D_{\vec{b}}f(0) &= -2 = \frac{3}{5}f_x(0) + \frac{4}{5}f_y(0) \\
D_{\vec{c}}f(0) &= 5 = -\frac{2}{3}f_x(0) + \frac{1}{3}f_y(0) + \frac{2}{3}f_z(0)
\end{aligned}$$

für die Komponenten von $\operatorname{grad} f(0)$.
Die Lösung lautet $\operatorname{grad} f(0) = (3, -\frac{19}{4}, \frac{103}{8})$. Daher lautet die Gleichung der Tangentialebene in 0

$$3x - \frac{19}{4}y + \frac{103}{8}z = 0.$$

7. Für welche Tripel von Funktionen $\varphi, \psi, \chi : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \neq 0\} \to \mathbb{R}$ existiert eine Funktion f, sodass $f_x = \varphi$, $f_y = \psi$ und $f_z = \chi$?

Falls f existiert, geben Sie f explizit an.

(a) $\varphi(x,y,z) = \frac{2x}{y}, \quad \psi(x,y,z) = 3y^2z^2 - \frac{x^2}{y^2}, \quad \chi(x,y,z) = 2y^3z.$

(b) $\varphi(x,y,z) = e^y + 2xy^3z^2, \quad \psi(x,y,z) = xe^y + 3x^2y^2z^2, \quad \chi(x,y,z) = 2x^2y^3 + x.$

(c) $\varphi(x,y,z) = e^z y\cos(xy)\,, \quad \psi(x,y,z) = e^z x\cos(xy)\,, \quad \chi(x,y,z) = e^z\sin(xy).$

(d) $\varphi(x,y,z) = ze^x, \quad \psi(x,y,z) = \frac{1}{z}\sin\left(\frac{y}{z}\right), \quad \chi(x,y,z) = \frac{y}{z^2}\sin\left(\frac{y}{z}\right) + e^x.$

Lösung:

(a) Es gelten die Integrabilitätsbedingungen

$$\varphi_y = \psi_x\,, \quad \psi_z = \chi_y\,, \quad \chi_x = \varphi_z\,,$$

wie man durch einfaches Nachrechnen bestätigt. Wir erhalten f durch Integration. (Der gegebene Differentialausdruck ist auf den beiden Halbräumen $y > 0$ und $y < 0$ definiert, welche beide achsenparallelen (unbeschränkte) Rechtecke sind.)

$$f(x,y,z) = \int f_x(x,y,z)\,dx = \int \varphi(x,y,z)\,dx = \int \frac{2\,x}{y}\,dx = \frac{x^2}{y} + g(y,z)$$

Aus

$$3\,y^2z^2 - \frac{x^2}{y^2} = \psi(x,y,z) \stackrel{!}{=} f_y(x,y,z) = -\frac{x^2}{y^2} + g_y(y,z)$$

erhalten wir

$$g(y,z) = \int 3\,y^2z^2\,dy = y^3z^2 + h(z).$$

Damit ist $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{y} + y^3z^2 + h(z)$, und aus

$$2\,y^3z = \chi(x,y,z) \stackrel{!}{=} f_z(x,y,z) = 2\,y^3z + h'(z)$$

erhalten wir $h'(z) = 0$, also $h(z) \equiv c$. Somit ist

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{y} + y^3z^2 + c.$$

Genauer ist

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + y^3z^2 + c & \text{für } y > 0 \\[2ex] \dfrac{x^2}{y} + y^3z^2 + \tilde{c} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

wobei wir die Konstanten c und $\tilde{c}$ in den beiden Halbräumen beliebig wählen können.

(b) Wie in a) prüft man die Integrabilitätsbedingungen. Es gilt $\psi_z \neq \chi_y$. Der gegebene Ausdruck ist daher kein vollständiges Differential.

(c) Es gelten die Integrabilitätsbedingungen

$$\varphi_y = \psi_x\,, \quad \psi_z = \chi_y\,, \quad \chi_x = \varphi_z\,,$$

wie man durch einfaches Nachrechnen bestätigt. Wir erhalten f durch Integration.

$$f(x,y,z) = \int \varphi(x,y,z)\,dx = \int e^z y\cos(xy)\,dx = e^z\sin(xy) + g(y,z)$$

Aus

$$e^z x\cos(xy) = \psi(x,y,z) \stackrel{!}{=} f_y(x,y,z) = e^z x\cos(xy) + g_y(y,z)$$

erhalten wir

$$g(y,z) = \int 0\,dy = 0 + h(z).$$

Damit ist $f(x,y,z) = e^z\sin(xy) + 0 + h(z)$, und aus

$$e^z\sin(xy) = \chi(x,y,z) \stackrel{!}{=} f_z(x,y,z) = e^z\sin(xy) + h'(z)$$

erhalten wir $h'(z) = 0$, also $h(z) \equiv c$. Somit ist

$$f(x,y,z) = e^z\sin(xy) + c.$$

(d) Wie in c) prüft man die Integrabilitätsbedingungen. Es gilt $\psi_z \neq \chi_y$. Der gegebene Ausdruck ist daher kein vollständiges Differential.

8. Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,(x,y,z) \longmapsto x^2 + 4x + y^2 + z^2 + 5.$$

Berechnen Sie die globalen Extrema von f auf der Kugel

$$B = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leq 16\}.$$

Lösung: *Lösungsweg 1* (mit Lagrange-Multiplikatoren):

Zuerst betrachten wir die Punkte im Inneren des Kugels B. Für die Extrema im Inneren gilt $\operatorname{grad} f(x,y,z) = (0,0,0)$; also

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x+4,\ 2y,\ 2z) = (0,\ 0,\ 0)\,.$$

Somit ist der Punkt $(-2,0,0)$ ein möglicher Extremum von f. Wir betrachten jetzt die kritischen Punkte von f im Rand $\partial B = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 = 16\}$ von B:

Sei $g\,:\,(x,y,z) \longmapsto x^2+y^2+z^2-16$. Es ist klar, dass ∂B eine Niveaufläche von g ist und dass für alle (x,y,z)

$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = (2x,\ 2y,\ 2z)$$

ist. Nach dem Satz der Lagrange-Multiplikatoren existiert für jedes Extremum von f auf ∂B ein λ, sodass

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda\cdot\operatorname{grad} g(x,y,z)$$

gilt. Wir erhalten also das folgende Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x+4 = 2\lambda x & \text{(I)} \\ 2y = 2\lambda y & \text{(II)} \\ 2z = 2\lambda z & \text{(III)} \\ x^2+y^2+z^2 = 16 & \text{(IV).} \end{array}\right\}.$$

Aus (II) folgt, dass $\lambda = 1$ oder $y = 0$; analog folgt aus (III), dass $\lambda = 1$ oder $z = 0$. Die Bedingung $\lambda = 1$ ergibt jedoch nach dem Ersetzen in die Gleichung (I) ein Widerspruch. Somit müssen $y = z = 0$ sein und folgt aus der Gleichung (IV), dass $x = \pm 4$.

Wir haben also aus dem Rand zwei Kandidaten für Extremalstellen: $(-4, 0, 0)$ und $(4, 0, 0)$. Wir vergleichen in der nächsten Tabelle die Werte der Funktion f an diesen Stellen:

(x, y, z)	$(-2, 0, 0)$	$(-4, 0, 0)$	$(4, 0, 0)$
$f(x, y, z)$	1	5	37

Das Minimum von f beträgt also 1 und wird im Inneren im Punkt $(-2, 0, 0)$ angenommen. Das Maximum beträgt 37 und wird auf dem Rand im Punkt $(4, 0, 0)$ angenommen.

Lösungsweg 2 (geometrische Lösung):

Die Niveauflächen von f sind gegeben durch

$$x^2 + 4x + y^2 + z^2 + 5 = c$$

oder

$$(x + 2)^2 + y^2 + z^2 = c - 1.$$

Es sind also Kugeln mit Zentrum $(-2,\ 0,\ 0)$. Daraus folgt, dass f das Minimum 1 in $(-2,\ 0,\ 0)$ annimmt und das Maximum 37 in $(4,\ 0,\ 0)$.