D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2021
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 15

MC-Aufgaben

1. Die Koordinatentransformation

$$x(u,v) = 2v,$$
$$y(u,v) = -2u$$

bildet Kreise auf Kreise ab.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Für $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ mit $u^2+v^2 = k^2$ gilt es $x(u,v)^2 + y(u,v)^2 = 4(u^2+v^2) = 4k^2$, also wird ein Kreis mit Radius k auf einen Kreis mit Radius $2k$ abgebildet.
Geometrisch: Die Transformation entspricht einer Stauchung um den Faktor 2 gefolgt von einer Drehung um 90 Grad im Uhrzeigersinn. Folglich bleiben Kreise erhalten.

2. Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Gebiets

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin(x)\}.$$

√ (a) $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8})$

(b) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

(c) $(1, \frac{\pi}{4})$

(d) $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

B besteht aus der Fläche zwischen der $x-$Achse und der Funktion $\sin(x)$ von 0 bis π. Seien (x_S, y_S) die Koordinaten des Schwerpunktes. Aus Symmetrie gilt es $x_S = \frac{\pi}{2}$. Für y_S gilt es

$$y_S F_B = \int\int_B y dF,$$

wobei F_B der Flächeninhalt von B ist. Es gilt

$$F_B = \int_0^\pi \sin x dx = 2,$$

und

$$\int\int_B y dF = \int_0^\pi \int_0^{\sin x} y dy dx = \int_0^\pi \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sin x} dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}.$$

Also $y_S = \frac{\pi}{8}$.

3. Betrachten Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \int_0^x x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

Welche der folgenden Integrale sind gleich I?

√ (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

√ (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

Das Integral (a) entsteht aus I durch Vertauschung der Variablen x und y. In (c) ist der Integrationsbereich durch dieselbe Bedingung wie bei I, nämlich $0 \leq y \leq x \leq 1$, gegeben. Da auch der Integrand gleich ist, stimmen diese beiden Integrale überein.

Um zu sehen, dass (b) nicht richtig ist, gibt es mehrere Möglichkeiten. *Möglichkeit 1:* Es wird über die Region $0 \leq x \leq y \leq 1$ integriert, der Integrand ist derselbe. Intuitiv stimmt (b) daher nicht. Eine Rechnung bestätigt dies:

$$\int_0^1 \int_0^y x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6},$$
$$\int_0^1 \int_0^x x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 [xy]_0^x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Möglichkeit 2: Vertauschen wir die Variablen x und y, so hat das Integral die Form

$$\int_0^1 \int_0^x y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

Es wird also beide Male über die Region $0 \leq y \leq x \leq 1$ integriert, einmal allerdings ist der Integrand gleich x, das andere Mal gleich y. Nun ist aber fast immer $y < x$, es muss also das Integral in (b) kleiner sein als I.

4. Sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\}$ die gefüllte Ellipse $(0,0)$ mit Hauptachsen $\sqrt{2}$ und 1. Dann gilt es

$$\int\int_D (2 - x^2 - 2y^2)\, dF \leq \int\int_B (2 - x^2 - 2y^2)\, dF$$

für alle Gebiete $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

✓ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Wir schreiben

$$D = \underbrace{\{(x,y) \in D \mid 2 - x^2 - 2y^2 < 0\}}_{=:D_1} \cup \underbrace{\{(x,y) \in D \mid 2 - x^2 - 2y^2 \geq 0\}}_{=:D_2} = D_1 \cup D_2.$$

Daher

$$\begin{aligned}\int_D (2 - x^2 - 2y^2) dF = \int_{D_1 \cup D_2} (2 - x^2 - 2y^2) dF = \\ \overset{(*)}{=} \int_{D_1} (2 - x^2 - 2y^2) dF + \int_{D_2} (2 - x^2 - 2y^2) dF \\ \overset{(**)}{\leq} \int_{D_2} (2 - x^2 - 2y^2) dF\end{aligned}$$

wobei $(*)$ ist gültig, da in unserem Fall $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ist, und die Ungleichung $(**)$ folgt aus der Monotonie des Integrals und nach Definition von D_1. Wir beachten, dass

$$\frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - x^2 - 2y^2 \geq 0,$$

also

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 - x^2 - 2y^2 \geq 0\}.$$

Insbesondere gilt es $D_2 \subseteq B$ und mit Monotonie des Integrals folgt es, dass

$$\int_D (2 - x^2 - 2y^2) dF \leq \int_{D_2} (2 - x^2 - 2y^2) dF \leq \int_B (2 - x^2 - 2y^2) dF$$

für beliebige Gebiete D gültig ist, und also, dass B die gewünschte Bedingung erfüllt.

5. Berechnen Sie das polare Flächenträgheitsmoment

$$J_0(D) = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$$

eines gleichseitigen homogenen Dreiecks mit Kantenlänge $a > 0$ bezüglich seines Schwerpunktes $S = (0, 0)$.

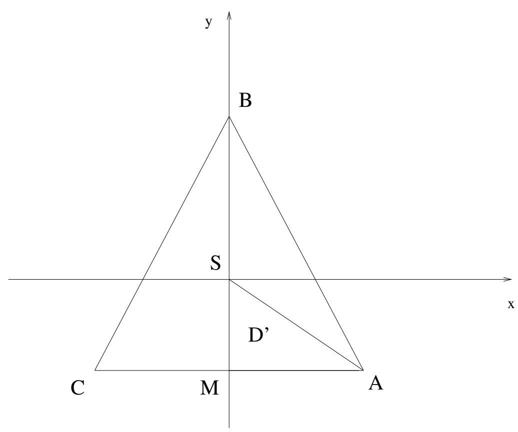
(a) 0

(b) $4\sqrt{3}a^3$

√ (c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3 \cdot 16} a^4$

(d) a^4

Wir wählen ein Koordinatensystem so, dass $S = (0, 0)$ und eine der Ecke des Dreiecks auf der positiven y-Achse liegt.



Aus Symmetriegründen erhalten wir

$$J_0 = 6 \iint_{D'} (x^2 + y^2)\, dxdy,$$

wobei D' das Dreieck ASM bezeichnet. Es gilt

$$A = (\frac{a}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{6} a),$$

und die durch SA bestimmte Gerade hat die Gleichung

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}} x.$$

Wir erhalten

$$J_0 = 6 \int_{\frac{-\sqrt{3}}{6}a}^{0} \int_0^{-\sqrt{3}y} (x^2 + y^2)\, dxdy = 6 \int_{\frac{-\sqrt{3}}{6}a}^{0} \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_0^{-\sqrt{3}y} dy = 6 \int_{\frac{-\sqrt{3}}{6}a}^{0} \left[-\sqrt{3}y^3 - \sqrt{3}y^3 \right] dy =$$

$$= -2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \int_{\frac{-\sqrt{3}}{6}a}^{0} y^3\, dy = -2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \left[\frac{y^4}{4} \right]_{\frac{-\sqrt{3}}{6}a}^{0} = \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 16} a^4.$$

Offene Aufgaben

6. Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x(u,v) &= 2u + v, \\ y(u,v) &= u - 3v. \end{aligned}$$

(a) Es bezeichne $\mathcal{R}$ das Einheitsquadrat in der xy-Ebene, also $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,1]$. Skizzieren Sie den Bereich $\widetilde{\mathcal{R}}$ der uv-Ebene, der unter dieser Transformation entsteht.

(b) Berechnen Sie die Einträge und die Determinante der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

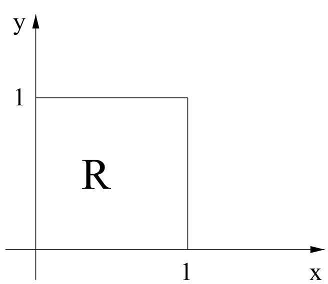
(c) Vergleichen Sie das Resultat aus (b) mit dem Verhältnis der Flächen von $\mathcal{R}$ und $\widetilde{\mathcal{R}}$.

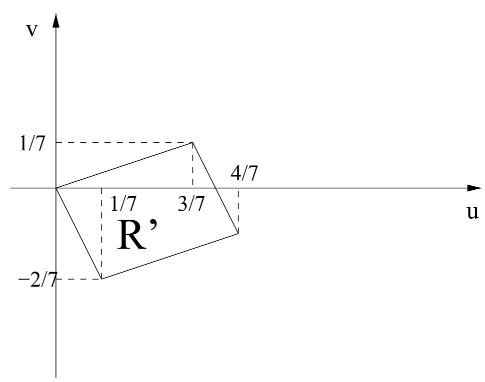
Lösung:

(a) Durch Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \tfrac{3}{7}x + \tfrac{1}{7}y, \\ v(x,y) &= \tfrac{1}{7}x - \tfrac{2}{7}y. \end{aligned}$$

Die vier Eckpunkte $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ des Einheitsquadrats in der xy-Ebene werden nun zu den vier Punkten $(0,0)$, $(1/7,-2/7)$, $(3/7,1/7)$ und $(4/7,-1/7)$ in der uv-Ebene. Da unter einer linearen Transformation Geraden erhalten werden, muss der Bereich $\widetilde{\mathcal{R}}$ also folgende Form haben:





(b) Es gilt

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist die Determinante gleich -7.

(c) Die Fläche in der uv-Ebene ist 7-mal kleiner, also genau um den Faktor der Determinante der Matrix J.

7. Gegeben sei eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Jedes Doppelintegral unten ergibt sich aus der Berechnung des Gebietsintegrales von f über ein gegebenes Gebiet S.

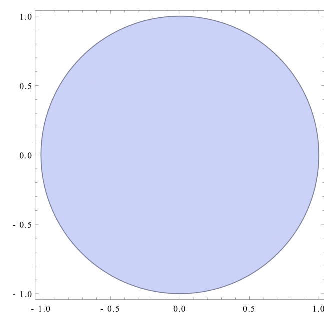
(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{-\sin(x/2)}^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

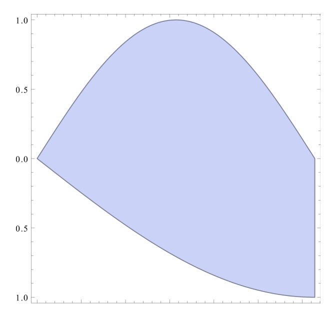
Skizzieren Sie jeweils das Gebiet S und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge.

Lösung:

(a) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$



(b) $\int_{-1}^{0}\int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{1}\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$



8. (a) Berechnen Sie

$$\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}F,$$

wobei D das durch die Kurven $y = x^2$ und $y = 1$ eingeschlossene Gebiet bezeichnet.

(b) Berechnen Sie

$$\iint_D xe^{x+y}\,\mathrm{d}F,$$

wobei $D = [0,1]\times[0,1]$ das Einheitsquadrat bezeichnet.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}F = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} x^2y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} x^2\left(1-x^6\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\left(x^2-x^8\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^9}{9}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{27}.$$

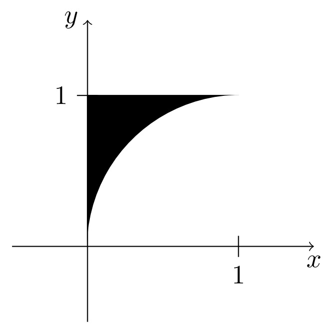
(b) Es gilt

$$\iint_D xe^{x+y}\,\mathrm{d}F = \int_0^1 \int_0^1 xe^{x+y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left[e^{x+y}\right]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(e^{x+1}-e^x\right)\mathrm{d}x.$$

Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\left(e^{x+1}-e^x\right)\mathrm{d}x &= \left[x(e^{x+1}-e^x)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \left(e^{x+1}-e^x\right)\mathrm{d}x \\ &= e^2 - e - \left[e^{x+1}-e^x\right]_{x=0}^{x=1} = e^2 - e - (e^2 - e - e + 1) = e - 1.\end{aligned}$$

9. Sei $S = \{(x,y) \in [0,1]^2 : (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$.



Berechnen Sie den Schwerpunkt von S.

Lösung: Sei F_S die Fläche von S. Da S ein Einheitsquadrat minus einen Viertelkreis von Radius 1 ist, gilt

$$F_S = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Für die x-Koordinate x_S des Schwerpunkts gilt

$$\begin{aligned}F_S x_S &= \int_0^1 \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^1 x dy dx \\ &= \int_0^1 (1 - \sqrt{1-(x-1)^2}) x dx \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} x dx \\ &= \frac{1}{2} - \int_{-1}^0 \sqrt{1-u^2}(u+1) du \\ &= \frac{1}{2} - \int_{-1}^0 \sqrt{1-u^2} u du - \int_{-1}^0 \sqrt{1-u^2} du.\end{aligned}$$

Wir haben

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1-u^2} du = \text{Fläche(Viertelkreis)} = \frac{\pi}{4}.$$

Andererseits gilt per Substitution $v = 1 - u^2$, dass

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1-u^2} u du = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{v} dv = -\frac{1}{2}\frac{v^{3/2}}{3/2} = -\frac{1}{3}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$x_S = \frac{1}{1-\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right) \approx 0.2234.$$

Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt auf der Geraden $y = 1 - x$, also gilt

$$y_S = 1 - x_S \approx 0.7766.$$

10. Für eine zweimal differenzierbare Funktion $f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$ in zwei Variablen ist der Laplace-Operator definiert als

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}.$$

Nach einer Koordinatentransformation nimmt der Laplace-Operator in Polarkoordinaten die Form

$$\Delta f \equiv \widetilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\widetilde{f}_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{f}_{\varphi\varphi}, \tag{1}$$

wobei $\widetilde{f}(\rho, \varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ die Funktion f nach Transformation zu Polarkoordinaten ist.

Sei nun $f : (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z)$ eine zweimal differenzierbare Funktion in drei Variablen. Der Laplace-Operator von f ist

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

(a) Berechnen Sie Δf für $f(x, y, z) = x^2y + 2xz^{-1} + \sin(xz)$.

(b) Wie kann man die Formel aus (1) erweitern, um Δf in zylindrischen Koordinaten zu darstellen?

Bemerkung: Die zylindrische Koordinaten sind durch die Transformation

$$x(\rho, \varphi, z) = \rho\cos(\varphi), \quad y(\rho, \varphi, z) = \rho\sin(\varphi), \quad z(\rho, \varphi, z) = z,$$

gegeben, wobei $\rho > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $z \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie, unter Zuhilfenahme von Teil (b), Δf für

$$f(x, y, z) = \frac{1}{z}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - 2z\sqrt{x^2 + y^2}$$

und $x, y, z > 0$.

Lösung:

(a) Es gilt $f_x = 2xy + 2z^{-1} + z\cos(xz)$, $f_y = x^2$ und $f_z = -2xz^{-2} + x\cos(xz)$. Also gilt

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2y - z^2\sin(xz), \\ f_{yy} &= 0, \\ f_{zz} &= 4xz^{-3} - x^2\sin(xz). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\Delta f = 2y + 4xz^{-3} - (x^2 + z^2)\sin(xz).$$

(b) Sei $\widetilde{f}(\rho, \varphi, z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$. Da die Koordinatentransformationen $x(\rho, \varphi, z)$ und $y(\rho, \varphi, z)$ unabhängig von z und die selben wie im Polarkoordinaten Fall sind, der zwei Variablen Fall (1) gibt

$$f_{xx} + f_{yy} = \widetilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\widetilde{f}_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{f}_{\varphi\varphi}.$$

Mit der verallgemeinerten Kettenregel erhalten wir

$$f_z = \widetilde{f}_{\rho}\underbrace{\rho_z}_{=0} + \widetilde{f}_{\varphi}\underbrace{\varphi_z}_{=0} + \widetilde{f}_{z}\underbrace{z_z}_{=1} = \widetilde{f}_{z}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\Delta f = \widetilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\widetilde{f}_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{f}_{\varphi\varphi} + \widetilde{f}_{zz}.$$

(c) In Zylinderkoordinaten haben wir $\widetilde{f}(\rho, \varphi, z) = \varphi z^{-1} - 2z\rho$. Also gilt

$$\widetilde{f}_\rho = -2z, \quad \widetilde{f}_{\rho\rho} = 0, \quad \widetilde{f}_\varphi = \frac{1}{z}, \quad \widetilde{f}_{\varphi\varphi} = 0, \quad \widetilde{f}_z = -\frac{\varphi}{z^2} - 2\rho, \quad \widetilde{f}_{zz} = \frac{2\varphi}{z^3}.$$

Folglich ist

$$\Delta f(x, y, z) = \widetilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\widetilde{f}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{f}_{\varphi\varphi} + \widetilde{f}_{zz} = \frac{2\varphi}{z^3} - \frac{2z}{\rho}.$$

Die Umkehrformeln für die Zylinderkoordinaten lauten

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi(x, y) = \arctan\frac{y}{x}, \quad z = z,$$

sofern $x > 0$, $y > 0$. Einsetzten in die obige Gleichung gibt

$$\Delta f(x, y, z) = -\frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{2\arctan\frac{y}{x}}{z^3}.$$