D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2021
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 16

MC-Aufgaben

1. Es sei B ein Bereich in der (x, y)-Ebene und $\widetilde{B}$ der via Polarkoordinaten entsprechende Bereich in der (ρ, φ)-Ebene. Welchem Integral entspricht $\int\int_B xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$?

(a) $\displaystyle\int\int_{\widetilde{B}} \rho^2 \sin\varphi \cos\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi$

√ (b) $\displaystyle\int\int_{\widetilde{B}} \rho^3 \sin\varphi \cos\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi$

(c) $\displaystyle\int\int_{\widetilde{B}} \rho^3 \sin\varphi \cos^2\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi$

Die allgemeine Formel lautet

$$\int\int_B f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\int_{\widetilde{B}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \, \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi.$$

Also ist (b) richtig.

2. Es sei

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}F,$$

wobei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ bezeichne. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integration lässt sich I auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) $\displaystyle I = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

√ (b) $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi$

(c) $\displaystyle I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

Beim dritten Integral wird über das Quadrat mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$ integriert.

3. Das Integral der Funktion $f(x,y) := \sqrt{4-x^2-y^2}$ über der Menge

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\}$$

ergibt

√ (a) $\frac{4\pi}{3}$.

(b) $\frac{16\pi}{3}$.

(c) 8π.

(d) $\frac{32\pi}{3}$.

In Polarkoordinaten

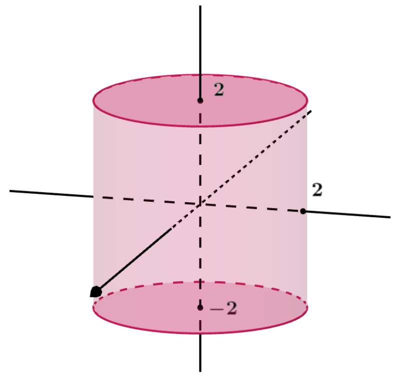
$$B = \{(\rho,\varphi) \mid \rho \in [0,2], \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]\}.$$

Das Volumenelement is $dF = \rho d\rho d\varphi$ und $4-x^2-y^2 = 4-\rho^2$. Dann

$$\int\int_B f dF = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{4}\int_0^4 \sqrt{s} ds = \frac{4\pi}{3},$$

wobei wir die Substitution $s = 4-\rho^2$ benutzt haben.

4. Welche Parametrisierung in Kugelkoordinaten passt zu dieser Zeichnung?



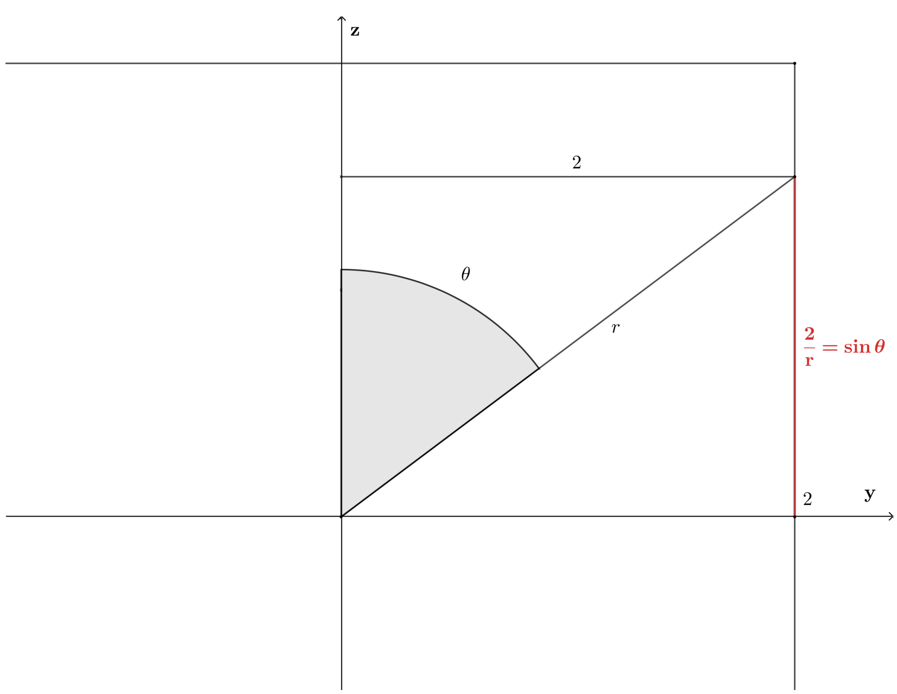
(a) $\{(r,\varphi,\theta) \mid r = \frac{2}{\cos\theta}, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\}$.

(b) $\{(r,\varphi,\theta) \mid 1 \leq r \leq 3\}$.

(c) $\{(r,\varphi,\theta) \mid r = 4\cos\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

√ (d) $\{(r,\varphi,\theta) \mid r = \frac{2}{\sin\theta}, 0 < \theta < \pi\}$.

(a),(b),(c) sind nicht möglich, denn um Punkte mit z-Koordinate kleiner als 0 zu beschreiben, muss θ im Intervall $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ liegen. Mit der folgenden Zeichung sieht man, dass (d) die korrekte Parametrisierung ist.



5. Sei T ein Tetraeder mit Eckpunkten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.
Berechnen Sie das Integral

$$\int\int\int_T f(x,y,z)dV,$$

mit $f(x,y,z) = x + y$.

(a) $\frac{4}{3}$

√ (b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{1}{2}$

Es gilt:

$$\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y}(x+y)dzdydx = \int_0^1\int_0^{2-2x}[(x+y)z]_{z=0}^{z=3-3x-\frac{3}{2}y}dydx =$$

$$= \int_0^1\int_0^{2-2x}(x+y)(3-3x-\frac{3}{2}y)dydx = \int_0^1\int_0^{2-2x}(3x-3x^2-\frac{9}{2}xy+3y-\frac{3}{2}y^2)dydx =$$

$$= \int_0^1[(3x-3x^2)y+(3-\frac{9}{2}x)\frac{y^2}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{y^3}{3}]_{y=0}^{y=2-2x}dx =$$

$$= \int_0^1[(3x-3x^2)(2-2x)+(3-\frac{9}{2}x)\frac{(2-2x)^2}{2}-\frac{(2-2x)^3}{3}]dx =$$

$$= \int_0^1(6-15x+12x^2-3x^3-4(1-x)^3)dx = [6x-15\frac{x^2}{2}+4x^3-3\frac{x^4}{4}+(1-x)^4]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

6. Gegeben ist ein Zylinder Z (Dichte 1) mit Radius R und Höhe h der senkrecht auf der xy-Ebene steht. Welches der folgenden Integrale in Zylinderkoordinaten beschreibt das Trägheitsmoment J des Zylinders Z bezüglich der z-Achse?

(a) $\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h \rho\, dz\, d\rho\, d\varphi$

(b) $\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h \rho^2\, dz\, d\rho\, d\varphi$

√ (c) $\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h \rho^3\, dz\, d\rho\, d\varphi$

(d) $\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h \rho^4\, dz\, d\rho\, d\varphi$

Das Trägheitsmoment bei konstanter Massendichte 1 ist das Integral $\int\int\int(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$. In Zylinderkoordinaten transformiert es sich zu

$$\int\int\int \rho^2\cdot\rho\, dz\, d\rho\, d\varphi$$

über $\varphi \in [0,2\pi]$ und $z \in [0,h]$ sowie $\rho \in [0,R]$.

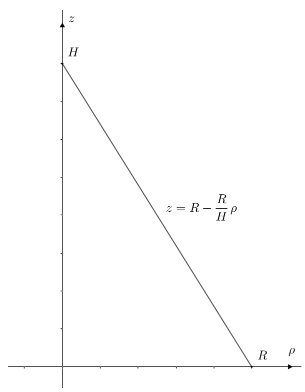
Offene Aufgaben

7. Das Trägheitsmoment eines homogenen geraden Kreiskegels K mit Masse m und Grundkreisradius R bezüglich einer Rotationsachse, die parallel zur Kegelachse ist, beträgt $\frac{11}{20}mR^2$. Wie gross ist der Abstand zwischen der Rotationsachse und der Achse des Kegels?

Lösung: Seien die Koordinaten so gewählt, dass die Achse von K mit der z-Achse übereinstimmt und die Grundflache vom Radius R auf der xy-Ebene liegt. Sei H die Höhe des Kegels.

Wir berechnen das Trägheitsmoment von K bezüglich seiner Achse mit Zylinderkoordinaten. In Zylinderkoordinaten

$$K = \{(\rho, \varphi, z) \mid 0 \leq \rho \leq R, o \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq H - \frac{H}{R}\rho\}.$$



Da der Kegel homogen (mit Dichte 1) ist, haben wir

$$J_0 = \int\int\int_K x^2 + y^2 dV = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{H-\frac{H}{R}\rho} \rho^2 \rho dz d\rho d\varphi = 2\pi \int_0^R \rho^3 (H - \frac{H}{R}\rho) d\rho = \frac{\pi}{10} HR^4.$$

Wir beachten, dass

$$m = \int\int\int_K 1 dV = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{H-\frac{H}{R}\rho} \rho dz d\rho d\varphi = \frac{\pi}{3} HR^2$$

und somit

$$J_0 = \frac{3}{10} R^2 m.$$

Nach dem Parallelelen-Achsen Theorem gilt es: $J = J_0 + md^2$ und somit

$$d = \sqrt{\frac{J - J_0}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{11}{20}R^2 m - \frac{3}{10}R^2 m\right)} = \frac{1}{2}R.$$

8. (a) Die Oberfläche einer Insel sei gegeben durch

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)/8} - e^{-2}.$$

Berechnen Sie das Volumen der Insel, welches über der Wasseroberfläche (Höhe $z = 0$) liegt.

(b) Sei K der endliche Körper, der im ersten Oktanten (d.h. $x, y, z > 0$) durch den Zylinder $y^2 + z^2 = 9$ und die Ebene $x = y$ begrenzt wird.
Erstellen Sie eine Skizze dieser Situation und berechnen Sie anschliessend das Volumen von K.

Lösung:

(a) Die Oberfläche der Insel ist der Teil des Graphes der Funktion f, welcher oben der xy-Ebene liegt. Also ist das Volumen der Insel gegeben durch Integration von f über den Bereich

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \geq 0\}.$$

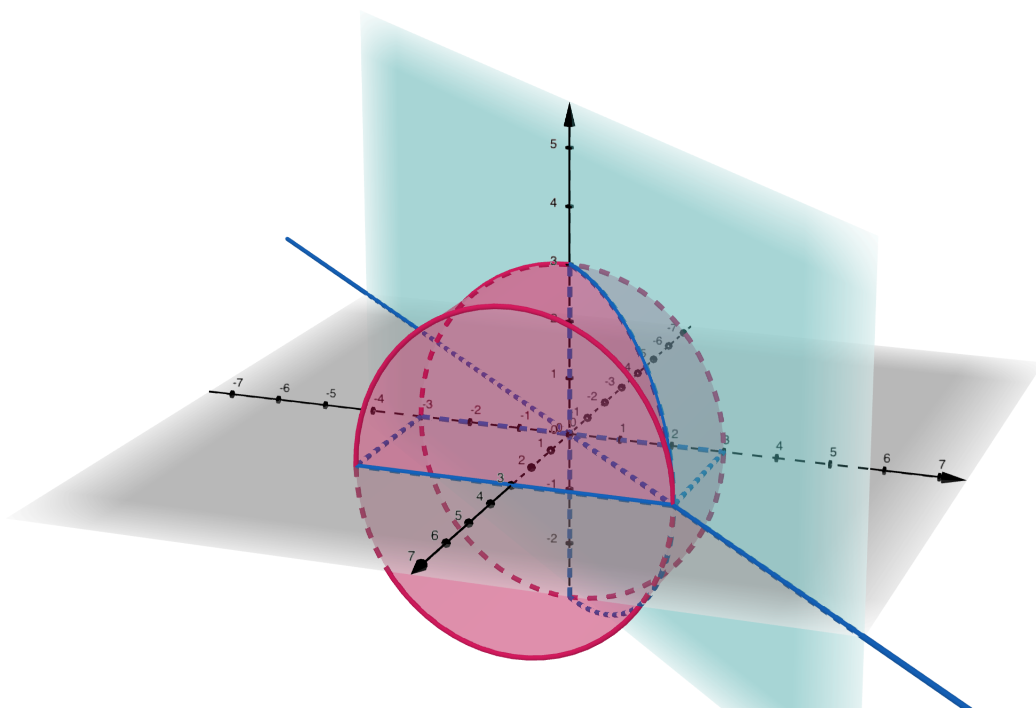
Wir lösen die Ungleichung $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)/8} - e^{-2} \geq 0$.

$$\begin{aligned} e^{-(x^2+y^2)/8} - e^{-2} \geq 0 &\Leftrightarrow e^{-(x^2+y^2)/8} \geq e^{-2} \\ &\Leftrightarrow -(x^2+y^2)/8 \geq -2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 16. \end{aligned}$$

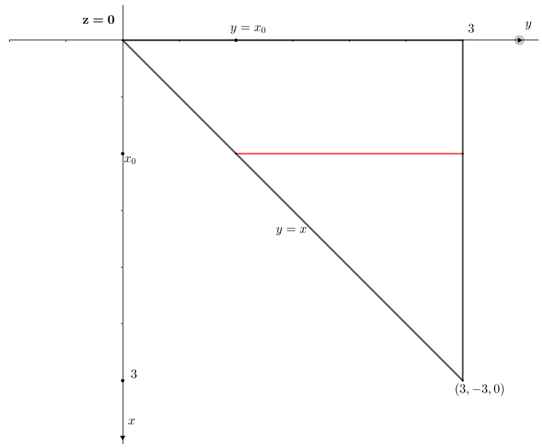
Also ist B eine Kreisscheibe von Radius 4. In Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} V &= \int\int_B e^{-(x^2+y^2)/8} - e^{-2} dF = \int_0^4 \int_0^{2\pi} (e^{-\frac{\rho^2}{8}} - e^{-2}) \rho d\varphi d\rho \\ &= 2\pi \left[-4e^{-\frac{\rho^2}{8}} - e^{-2}\frac{\rho^2}{2} \right]_0^4 = 2\pi(4 - \frac{12}{e^2}). \end{aligned}$$

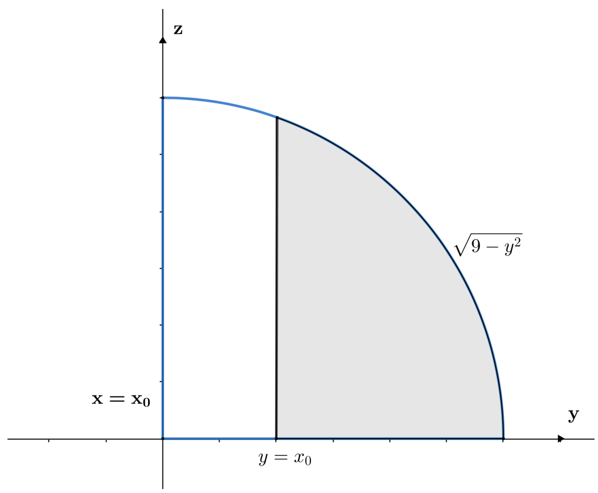
(b) Der Körper K wird durch die xy-Ebene, die yz-Ebene, die $\{x = y\}$-Ebene und den Rotationszylinder mit Radius 3 um der x-Achse begrenzt (siehe Figur).



Um eine Parametrisierung von K zu finden, betrachten wir für alle $0 \leq x_0 \leq 3$ den Schnitt von K mit der Ebene $\{x = x_0\}$.
Für ein fixes $x_0 \in [0, 3]$ liegt die y-Koordinate eines Punktes von K zwischen x_0 und 3.



Die folgende Figur zeigt den Schnitt von K mit der Ebene $\{x = x_0\}$.



Also gilt

$$K \cap \{x = x_0\} = \{(x_0, y, z) \mid x_0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq \sqrt{9 - y^2}\},$$

und somit

$$K = \bigcup_{0 \leq x_0 \leq 3} (K \cap \{x = x_0\}) = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 3, x \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq \sqrt{9 - y^2}\}.$$

Das Volumen ist nun

$$
\begin{aligned}
V = \int\int\int_K dV &= \int_0^3 \int_x^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} dz dy dx \\
&= \int_0^3 \int_x^3 \sqrt{9-y^2} dy dx \\
&\overset{(\star)}{=} \frac{1}{2}\int_0^3 \left[\sqrt{9-y^2}y + 9\arcsin\frac{y}{3}\right]_{y=x}^3 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{9\pi}{2} - x\sqrt{9-x^2} - 9\arcsin\frac{x}{3} dx = \\
&\overset{(\star\star)}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{9\pi}{2}x + \frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}} - 9\sqrt{9-x^2} - 9x\arcsin\frac{x}{3}\right]_0^3 \\
&= \frac{1}{2}(\frac{27\pi}{2} - \frac{27\pi}{2} - \frac{9^{3/2}}{3} + 9\sqrt{9}) \\
&= 9,
\end{aligned}
$$

wobei

($\star$) kann mit partieller Integration $\int \underset{\downarrow}{\sqrt{9-y^2}} \cdot \underset{\uparrow}{1} dy$ oder wie im Kapitel III.5 berechnet werden, und

($\star\star$) kann auch mit partieller Integration $\int \underset{\downarrow}{\arcsin y} \cdot \underset{\uparrow}{1} dy$ berechnet werden (siehe Kapitel III.4 im Skript).

9. Ein gerader Kreiszylinder mit Radius R, $(x^2+y^2 \leq R^2)$, und Höhe H, $(0 \leq z \leq H)$, habe eine Dichte von $\theta(x,y,z) = 1+x^2+y^2+z$. Berechnen Sie die Masse und das Trägheitsmoment bei Rotation um die Achse $a = \{(1,1,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Lösung: In Zylinderkoordinaten

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\cos(\varphi) \\
y &= \rho\sin(\varphi) \\
z &= z
\end{aligned}
$$

ist das Gebiet gegeben durch

$$\rho \in [0,\ R],\ \ \varphi \in [0,\ 2\pi],\ \ z \in [0,\ H].$$

Das Volumenelement ist $\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z$, die Dichte $\theta = 1 + \rho^2 + z$.

Die Masse ist gegeben durch

$$m = \iiint_V \theta dV.$$

also berechnen wir sie zu

$$
\begin{aligned}
m = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (1+\rho^2+z)\rho d\rho d\varphi dz &= 2\pi \int_0^H \int_0^R (1+\rho^2+z)\rho d\rho dz \\
= \quad 2\pi\Big(\int_0^H \int_0^R \rho d\rho dz + \int_0^H \int_0^R \rho^3 d\rho dz + \int_0^H \int_0^R z\rho d\rho dz\Big) \\
= \quad 2\pi\Big(\frac{HR^2}{2} + \frac{HR^4}{4} + \frac{H^2R^2}{4}\Big) = \frac{\pi HR^2}{2}(2+R^2+H).
\end{aligned}
$$

Das Trägheitmoment bezüglich der z-Achse ist gegeben durch

$$J_0 = \iiint_V \theta(x^2+y^2) dV.$$

Mit $\sqrt{x^2+y^2}=\rho,\ dV=\rho d\rho d\varphi dz$ lautet das Trägheitsmoment in Zylinderkoordinaten:

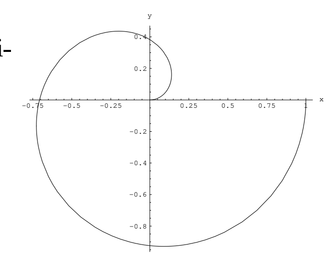
$$\begin{aligned}
J_0 = & \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (1+\rho^2+z)\rho^2 \rho d\rho d\varphi dz = 2\pi \int_0^H \int_0^R (1+\rho^2+z)\rho^2 \rho d\rho dz \\
= & \ 2\pi\Big(\int_0^H \int_0^R \rho^3 d\rho dz + \int_0^H \int_0^R \rho^5 d\rho dz + \int_0^H \int_0^R z\rho^3 d\rho dz \Big) \\
= & \ 2\pi\Big(\frac{HR^4}{4} + \frac{HR^6}{6} + \frac{H^2R^4}{8} \Big) = \frac{\pi HR^4}{12}(6+4R^2+3H).
\end{aligned}$$

Die Distanz zwischen der z-Achse und der Achse a ist $d=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Mit dem Parallelachsen-Theorem folgt

$$J = J_0 + md^2 = \frac{\pi HR^4}{12}(6+4R^2+3H) + 2\cdot\frac{\pi HR^2}{2}(2+R^2+H) = \pi HR^2\left(\frac{R^2}{4}(6+H)+\frac{R^4}{3}+H+2\right).$$

10. In der xy-Ebene werde der Bereich B durch die Strecke von $(0,0)$ nach $(1,0)$ und dem Kurvenbogen mit der Polardarstellung $\rho=\sin(\frac{\varphi}{4}),\ 0\le\varphi\le 2\pi$ begrenzt.
Berechnen Sie das Volumen des über dem Bereich B liegenden Teils der Einheitskugel

$$\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1\}.$$



Lösung: Zur Berechnung eignen sich am besten Polarkoordinaten (ρ,φ).

$$B=\{(\rho,\varphi): 0\le\rho\le\sin(\frac{\varphi}{4}),\ 0\le\varphi<2\pi\}$$

$V=\int_B \sqrt{1-\rho^2}\,dF$ mit $dF=\rho\,d\rho\,d\varphi$.

$$\begin{aligned}
V = & \int_0^{2\pi}\int_0^{\sin(\varphi/4)} \sqrt{1-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\frac{2}{3}(1-\rho^2)^{3/2}\right]_0^{\sin(\varphi/4)} d\varphi \\
= & -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos^3(\frac{\varphi}{4})-1\,d\varphi = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cos(\frac{3\varphi}{4})+\frac{3}{4}\cos(\frac{\varphi}{4})-1\,d\varphi \\
= & -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\sin(\frac{3\varphi}{4})+3\sin(\frac{\varphi}{4})-\varphi\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}+3-2\pi) = \frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}.
\end{aligned}$$