Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 17

MC-Aufgaben

1. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ erklärt durch die Vorschrift

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Es sei $J(x,y)$ die Jacobimatrix der Funktion f an der Stelle (x,y). Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $\det J(x,y) = 1$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\det J(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

√ (c) $\det J(x,y) = 0$ genau dann, wenn $(x,y) = (0,0)$.

(d) $\det J(x,y) = 16$ auf der Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Die Aussage c) ist die richtige, denn

$$\det J(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2).$$

2. Die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation $\vec{r}(u,v) = (au\cos v, bu\sin v)$ ist

(a) ab.

√ (b) abu.

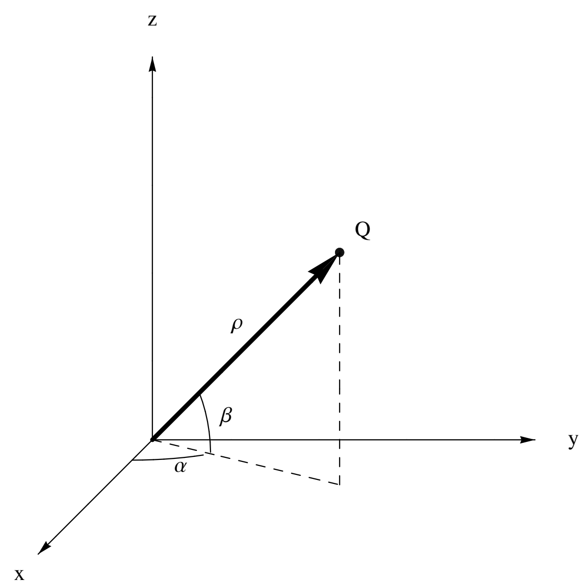
(c) $abu(\cos^2 v - \sin^2 v)$.

(d) $\begin{pmatrix} a\cos v & -au\sin v \\ b\sin v & bu\cos v \end{pmatrix}$.

Die Funktionaldeterminante ist die Determinante der Jacobimatrix der Transformation. Also

$$\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a\cos v & -au\sin v \\ b\sin v & bu\cos v \end{pmatrix} = abu(\cos^2 v + \sin^2 v) = abu.$$

3. Das Volumenelement der Koordinaten, welche in der untenstehenden Abbildung definiert sind, ist gegeben durch



√ (a) $\rho^2 \cos\beta \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

(b) $\rho \cos\alpha \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

(c) $\rho^2 \sin\beta \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

(d) $\rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

(e) $\rho \sin\beta \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

Die kartesischen Koordinaten werden wie folgt durch die Koordinaten (ρ, β, α) ausgedrückt

$$x = \rho \cos\alpha \cos\beta, \quad y = \rho \sin\alpha \cos\beta \quad \text{und} \quad z = \rho \sin\beta,$$

wobei $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \alpha < 2\pi$ und $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$. Das Volumenelement ergibt sich dann aus $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = |\det(J)|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$ mit

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \alpha, \beta)} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & -r\sin(\alpha)\cos(\beta) & -r\cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) & r\cos(\alpha)\cos(\beta) & -r\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & 0 & r\cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow |\det(J)| = \rho^2 \cos\beta$$

Also ist (a) die richtige Antwort.

4. Die Ableitung von $\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{x} dx$ nach t ist

(a) $\frac{\sin x}{x}$

(b) $\cos t$

✓ (c) $\frac{\sin t}{t}$

(d) $\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{t} dt$.

Durch Vertauschen der Ableitung und Integralzeichen erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(xt)}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cos(xt)\cdot x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos(xt)\mathrm{d}x = \frac{\sin(xt)}{t}\Big|_{x=0}^1 = \frac{\sin t}{t}.$$

5. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Die zweite Ableitung von $\int_0^x (x-s)g(s)\mathrm{d}s$ nach x ist

✓ (a) $g(x)$

(b) $\int_0^x g(s)\mathrm{d}s$

(c) 0

(d) $g'(x) + g(x)$

Sei $I(x) = \int_0^x (x-s)g(s)\mathrm{d}s$. Durch Vertauschen der Ableitung und Integralzeichen erhalten wir

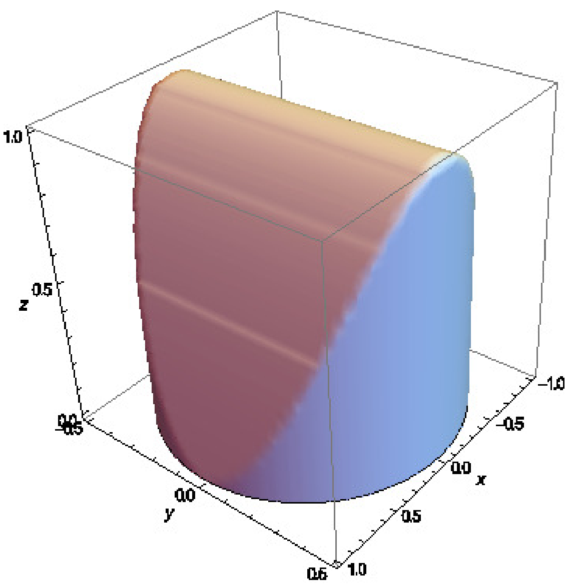
$$I'(x) = (x-x)g'(x)\cdot 1 - (0-x)\cdot 0 + \int_0^x 1\cdot g(t)\mathrm{d}t = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t.$$

Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung folgt

$$I''(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = g(x).$$

Offene Aufgaben

6. Berechnen Sie das oberhalb der Ellipse $x^2 + 4y^2 \leq 1$ und unterhalb der Fläche $z = 1 - x^2$ liegende Volumen.



Hinweis: Finden Sie Koordinaten in der xy-Ebene in denen die Ellipse eine besonders einfache Form hat.

Lösung: Das Volumen erhält man durch Integration von $f(x, y) = 1 - x^2$ über die Fläche $A \subset \mathbb{R}^2$, die durch die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$ begrenzt ist:

$$V = \iint_A f(x, y)\, dxdy.$$

Mit folgendem Koordinatenwechsel $(x, y) \to (s, \varphi)$

$$\begin{aligned} x &= s\cos(\varphi) \\ y &= \frac{s}{2}\sin(\varphi) \end{aligned}$$

vereinfachen wir das Problem. Die Ellipse ist nun durch die Gleichung $s = 1$ gegeben. Die Funktion f ist gegeben durch $f(s, \varphi) = 1 - s^2\cos^2(\varphi)$.
Mit Hilfe der Jacobideterminante findet man: $dxdy = \frac{s}{2} ds d\varphi$.
So wird das Integral zu

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y)\, dxdy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(s, \varphi) \frac{s}{2} d\varphi ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(s - s^3\cos^2(\varphi)\right) d\varphi ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2\pi s - \pi s^3\right) ds \\ &= \frac{\pi}{2}\left(s^2 - \frac{s^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

7. Berechnen Sie das Volumen des Körpers K, welcher von der Sphäre

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 19\}$$

und dem Hyperboloid

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = -1\}$$

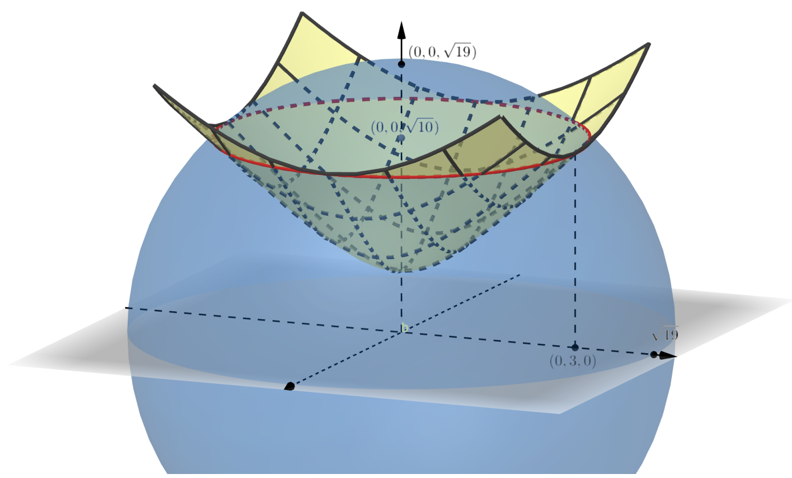
eingeschlossen wird, und oberhalb der xy-Ebene liegt.

Lösung: Um den Körper K zu parametriesieren bestimmen wir zuerst den Schnitt der zwei Flächen.

$$\begin{cases} z^2 = 19 - x^2 - y^2 \\ z^2 = 1 + x^2 + y^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 19 - x^2 - y^2 = 1 + x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

und $z^2 = 1 + x^2 + y^2 = 10$. Also der Schritt ist der Kreis von Radius 3 in der Ebene $\{z = \sqrt{10}\}$.

So der Körper besteht aus allen Punkten, die oberhalb des Hyperbolids und unterhalb der Sphäre liegen.

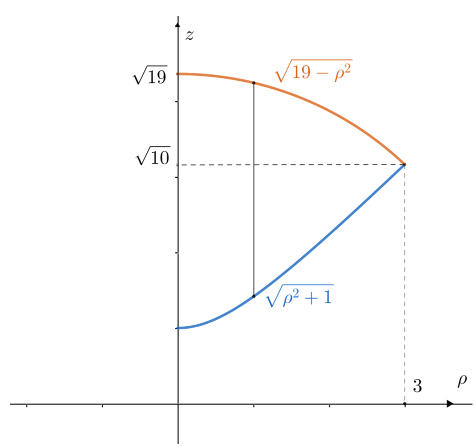


Wir parametrisieren K mit Zylinderkoordinaten: der Winkel ist $\varphi \in [0, 2\pi]$ und für ein $\rho \in [0,3]$ gilt es

$$\rho^2 + 1 \le z^2 \le 19 - \rho^2,$$

und da $z \ge 0$

$$\sqrt{\rho^2+1} \le z \le \sqrt{19-\rho^2}.$$



Also

$$K = \{(\rho, \varphi, z) \mid \varphi \in [0, 2\pi], \rho \in [0, 3], \sqrt{\rho^2 + 1} \leq z \leq \sqrt{19 - \rho^2}\}.$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} V = \int\int\int_K \mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{\sqrt{1+\rho^2}}^{\sqrt{19-\rho^2}} \rho \mathrm{d}z \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \int_0^3 \rho(\sqrt{19 - \rho^2} - \sqrt{1 + \rho^2}) \mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \int_0^3 \sqrt{19 - \rho^2} \rho \mathrm{d}\rho - 2\pi \int_0^3 \sqrt{1 + \rho^2} \rho \mathrm{d}\rho \\ &= -\pi \int_{19}^{10} \sqrt{y} \mathrm{d}y - \pi \int_1^{10} \sqrt{y} dy \\ &= -\frac{2}{3}\pi(10\sqrt{10} - 19\sqrt{19} + 10\sqrt{10} - 1) \\ &= \frac{2}{3}\pi(19\sqrt{19} - 20\sqrt{10} + 1). \end{aligned}$$

8. Wenden Sie eine angemessene Variablentransformation an, um das Integral

$$\int\int_S e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$$

zu berechnen, wobei S das Dreieck ist, welches durch die Gerade $x + y = 2$ und die zwei Achsen begrenzt wird.

Lösung: Wir betrachten die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} u(x, y) &= y - x \\ v(x, y) &= y + x. \end{aligned}$$

Um das Volumenelement $dxdy$ in den Koordinaten (u, v) zu schreiben, müssen wir $x(u, v), y(u, v)$ bestimmen. Wir lösen

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$$

nach x, y und erhalten $x(u, v) = \frac{v-u}{2}$ und $y(u, v) = \frac{v+u}{2}$. Also ist die Determinante der Jacobi-Matrix der Transformation gleich

$$\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Somit gilt es $dxdy = \frac{1}{2} dudv$. Die Fläche S in der (u, v)-Koordinaten ist

$$\tilde{S} = \{(u, v) \mid 0 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v\}.$$

Somit

$$\begin{aligned} \int\int_S e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy = \int\int_{\tilde{S}} e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} = \frac{1}{2} \int_0^2 v e^{\frac{u}{v}} |_{u=-v}^v dv \\ = \frac{1}{2} \int_0^2 v(e - \frac{1}{e}) dv = e - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

9. Es bezeichne T die Transformation

$$T(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cosh v \\ u \sinh v \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobideterminante von T.

(b) Es sei

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4, -\frac{x}{2} \leq y \leq \frac{x}{2}, x > 0\}.$$

Skizzieren Sie und parametrisieren Sie B durch (u,v), d.h. bestimmen Sie das Urbild $\tilde{B} = T^{-1}(B)$ von B unter der Transformation T.

(c) Berechnen Sie

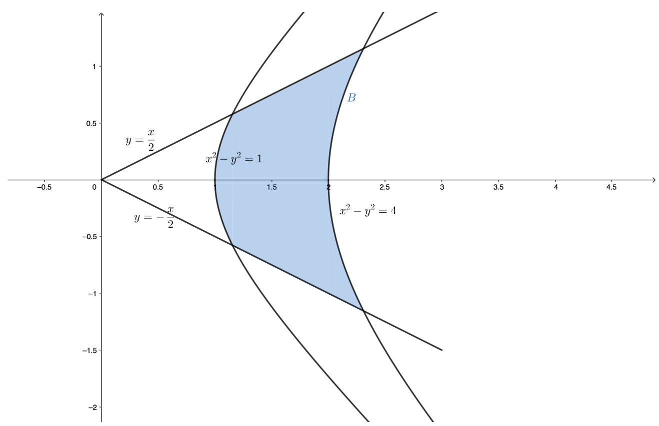
$$\int\int_B e^{-(x^2-y^2)} \mathrm{d}F.$$

Lösung:

(a) Die Jacobideterminante ist

$$\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cosh v & u \sinh v \\ \sinh v & u\cosh v \end{pmatrix} = u\cosh^2 v - u \sinh^2 v = u.$$

(b) Der Bereich B liegt zwischen den zwei Hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$ $(x > 0)$ und den Geraden $y = \pm\frac{x}{2}$.



Um B mit den Koordinaten u, v zu parametriesieren, müssen wir das Urbild $T^{-1}(B)$ bestimmen:

$$\tilde{B} = T^{-1}(B) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid T(u,v) \in B\}.$$

Es gilt

$$T(u,v) \in B \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq u^2\cosh^2 v - u^2 \sinh^2 v \leq 4 \\ \frac{-u\cosh v}{2} \leq u \sinh v \leq \frac{u \cosh v}{2} \\ u \cosh v > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq u^2 \leq 4 \\ -\frac{1}{2} \leq \frac{\sin hv}{\cosh v} \leq \frac{1}{2} \\ u > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ \tanh^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \leq v \leq \tanh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ -\frac{\ln 3}{2} \leq v \leq \frac{\ln 3}{2}. \end{cases}$$

Wir haben benutzt, dass $\cosh v > 0$ für alle v und dass, $\tanh^{-1}(v)$ monoton steigend ist. Somit

$$\tilde{B} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 2, -\frac{\ln 3}{2} \leq v \leq \frac{\ln 3}{2}\}.$$

(c) Wir benutzten die Koordinatentransformation T um das Integral zu berechnen. Aus (a) ist das Flächenelement $dF = u du dv$.

$$\begin{aligned}
\int\int_B e^{-(x^2-y^2)} \mathrm{d}F = \int\int_{\tilde{B}} e^{-u^2} u \mathrm{d}u \mathrm{d}v &= \int_{-\frac{\ln 3}{2}}^{\frac{\ln 3}{2}} \int_1^2 u e^{-u^2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v \\
&= \left(\frac{\ln 3}{2} + \frac{\ln 3}{2}\right) \int_0^u u e^{-u^2} \mathrm{d}u = \ln 3 \left[-\frac{1}{2} e^{-u^2}\right]_1^2 \\
&= \frac{\ln 3}{2} (\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4}).
\end{aligned}$$

10. (a) Berechnen Sie den Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix für die Koordinatentransformation von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten.

(b) Vergleichen Sie das Resultat aus (a) mit der Determinante der Jacobi-Matrix für die Koordinatentransformation von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten.

Lösung:

(a) Die Transformationsgleichungen von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten lauten

$$\begin{aligned}
r(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
\varphi(x,y,z) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi \qquad \text{wobei} \begin{cases} k = 0 & \text{für } x > 0, y \geq 0 \\ k = 1 & \text{für } x < 0 \\ k = 2 & \text{für } x > 0, y < 0 \end{cases} \\
\theta(x,y,z) &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \text{für } \sqrt{x^2+y^2} \neq 0.
\end{aligned}$$

Daraus kann man die Jacobi-Matrix $J = \dfrac{\partial(r,\varphi,\theta)}{\partial(x,y,z)}$ berechnen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \text{(analog für } y \text{ und } z\text{)} \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} \\
\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \\
\frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-1}{1+\frac{z^2}{x^2+y^2}} \frac{-zx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{(analog für } y\text{)} \\
\frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{-1}{1+\frac{z^2}{x^2+y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow J = \frac{\partial(r,\varphi,\theta)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Determinante ist dann

$$\begin{aligned}
\det(J) &= \frac{-x^2\left(x^2+y^2\right)-y^2z^2-y^2\left(x^2+y^2\right)-x^2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \\
&= -\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\right)+\left(x^2+y^2\right)z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

(b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Determinante der Jacobi-Matrix für die Koordinatentransformation von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten ist $\det J_1 = -r^2\sin(\theta)$. Aus (a)

$$\det(J) = \frac{-1}{x^2+y^2+z^2}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-1}{r^2\sin(\theta)} = \frac{1}{\det J_1} = \frac{1}{\det J_1}.$$

11. Die Funktion $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ sei durch

$$F(\alpha) := \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\arctan(\alpha t)}{t}\mathrm{d}t$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Ableitung von F identisch gleich Null ist, mittels

(a) Substitution.

(b) Ableitung unter dem Integral.

Lösung:

(a) Um das Integral zu berechnen, verwenden wir die Substitution $\tan(u) = \alpha t$, so dass $\alpha \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u$:

$$F(\alpha) = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\arctan(\alpha t}{t}\mathrm{d}t = \int_{\arctan(0)}^{\arctan(1)} \frac{u}{\tan u}\frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u}{\sin u\cos u}\mathrm{d}u.$$

Wir beachten, dass $F(\alpha)$ unabhängig von α ist. Daraus folgt, dass $\frac{d}{d\alpha}F \equiv 0$.

(b) Wir wenden den Satz über das Vertauschen von Ableitung und Integralzeichen (Kapitel V.5 im Buch) mit der Funktion $f(t,\alpha) = \frac{\arctan(\alpha t)}{t}$ an. Sie hat stetige partielle Ableitung

$$f_\alpha(t,\alpha) = \frac{1}{t}\frac{t}{(\alpha t)^2+1} = \frac{1}{(\alpha t)^2+1}.$$

Der Satz besagt, dass

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^{\frac{1}{\alpha}} f(t,\alpha)\mathrm{d}t = f_\alpha(\frac{1}{\alpha},\alpha)\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\right) - f(0,\alpha)\frac{d}{d\alpha}(0) + \int_0^{\frac{1}{\alpha}} f_\alpha(t,\alpha)\mathrm{d}t.$$

Somit gilt es

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}F(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\arctan(\alpha t)}{t}\mathrm{d}t &= \frac{\arctan(\alpha\frac{1}{\alpha})}{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{1}{\alpha^2}\right) - 0 + \int_0^1 \frac{1}{(\alpha t)^2+1}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{4\alpha} + \left[\frac{\arctan(\alpha t)}{\alpha}\right]_{t=0}^{\frac{1}{\alpha}} = -\frac{\pi}{4\alpha} + \frac{\pi}{4\alpha} - 0 = 0.
\end{aligned}$$

12. Berechnen Sie $\int_0^1 (t \ln t)^{60} \mathrm{d}t$.

Hinweis: Betrachten Sie $g(a) := \int_0^1 t^a \mathrm{d}t$ und berechnen Sie die n-te Ableitung $g^{(n)}(a)$ auf zwei verschiedene Arten.

Lösung: Sei $g(a) := \int_0^1 t^a \mathrm{d}t$. Wir rechnen $g^{(n)}(a)$ auf zwei verschiedene Arten:

(1) Ableiten unter dem Integral (wir finden somit einen anderen Ausdruck für $\int_0^1 (t \ln t)^n \mathrm{d}t$), und

(2) $\int_0^1 t^a \mathrm{d}t$ berechnen und dann ableiten (wir finden somit einen expliziten Ausdruck für $g^{(n)}(a)$).

(1) Wir betrachten die Funktion $f : [0,1] \times [0, \infty], f(t,a) = t^a$. Sie ist unendlich oft stetig partiell nach a differenzierbar und $f_a(t,a)$ ist

$$f_a(t,a) = t^a \ln(t).$$

Wir können also 'die Ableitung unter das Integral nehmen' und es gilt

$$\frac{d}{da} \int_0^1 t^a dt = \int_0^1 \frac{d}{da} t^a dt = \int_0^1 t^a \ln(t) dt.$$

Wir machen es n-mal und erhalten

$$g^{(n)}(a) = \frac{d^n}{da^n} \int_0^1 t^a dt = \int_0^1 \frac{d^n}{da^n} (t^a) dt.$$

Wir zeigen nun mittels Induktion, dass

$$\frac{d^n}{da^n} (t^a) = t^a (\ln t)^n.$$

$n = 1$: Es gilt $\frac{d}{da} t^a = t^a \ln t$.
$n \to n+1$: Wir nehmen an es gelte $\frac{d^n}{da^n}(t^a) = t^a (\ln t)^n$. Dann

$$\frac{d^{n+1}}{da^{n+1}}(t^a) = \frac{d}{da}\left(\frac{d^n}{da^n}(t^a)\right) = \frac{d}{da}\left(t^a (\ln t)^n\right) = (\ln t)^n \frac{d}{da} t^a = (\ln t)^n \ln(t) t^a = (\ln t)^{n+1} t^a.$$

Wir haben also gezeigt, dass

$$\frac{d^n}{da^n} g(a) = \int_0^1 t^a \mathrm{d}t = \int_0^1 t^a (\ln t)^n \mathrm{d}t.$$

Wenn $t = 60$ und $a = 60$, ist der Term auf der rechten Seite genau was wir berechnen möchten:

$$g^{(60)}(60) = \int_0^1 (t \ln t)^{60} \mathrm{d}t. \tag{1}$$

(2) Wir berechnen nun $g^{(60)}(a)$ wie folgt. Es gilt

$$g(a) = \int_0^1 t^a \mathrm{d}t = \left[\frac{t^a}{a+1}\right]_{t=0}^1 = \frac{1}{a+1}.$$

Behauptung: $g^{(n)}(a) = (-1)^n \frac{n!}{(a+1)^{n+1}}$ für alle $n \geq 1$.
Beweis: Wir verwenden Induktion.
$n = 1$:

$$g'(a) = \frac{d}{da}\left(\frac{1}{a+1}\right) = -\frac{1}{(1+a)^2} = (-1)^1 \frac{1!}{(1+a)^{1+1}}.$$

$n \to n+1$: Wir nehmen an es gilt $g^{(n)}(a) = (-1)^n \frac{n!}{(a+1)^{n+1}}$. Dann

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(a) &= \frac{d}{da}(g^{(n)}(a)) = \frac{d}{da}\left((-1)^n \frac{n!}{(a+1)^{n+1}}\right) \\ &= (-1)^n n! \frac{d}{da}\left((a+1)^{-1-n}\right) \\ &= (-1)^n n!(-1-n)(a+1)^{-1-n-1} \\ &= (-1)^n n!(-1)(n+1)(a+1)^{-(n+1+1)} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(a+1)^{(n+1)+1}}. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. Mit $n = 60$ und $a = 60$ gilt es

$$g^{(60)}(60) = (-1)^{60} \frac{60!}{(a+1)^{60+1}} = \frac{60!}{(61)^{61}}. \tag{2}$$

Mit (1) und (2) folgt es

$$\int_0^1 (t \ln t)^{60} \mathrm{d}t = g^{(60)}(60) = \frac{60!}{(61)^{61}}.$$