D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2021
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 18

MC-Aufgaben

1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Der Operator div(·) ordnet einem Vektorfeld $\vec{v}$ ein Skalarfeld $\operatorname{div}\vec{v}$ zu.

(b) Ein Vektorfeld, welches aus parallelen Vektoren besteht, hat Divergenz Null.

(c) Ein Vektorfeld, welches aus parallelen Vektoren besteht, hat Rotation Null.

√ (d) Der Operator grad(·) ordnet einem Skalarfeld f ein Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ zu.

√ (e) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$ ist eine zulässige Bildung.

Die Divergenz eines Vektorfelds $\vec{v}(x, y, z)$ ist definiert durch

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Also ist (a) wahr.
(b) ist falsch: betrachten Sie z.B. $\vec{v}(x, y) = (x, 0)$.
(c) ist falsch: betrachten Sie z.B $\vec{v}(x, y, z) = (0, 0, x^2)$. Dann $\operatorname{rot}\vec{v} = (0, -2x, 0)$. Der Gradient eines Skalarfeldes f ist definiert durch

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)).$$

Also ist (d) wahr. Aus (a) und (d) folgt, dass (e) wahr ist.

2. Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon (x,y,z) \mapsto \left(xz^\alpha r,\ yz^\beta r,\ z^2 r^3\right) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Für welche Konstanten α und β ist $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$?

(a) $\alpha = 0$ und $\beta = 0$.

(b) $\alpha = 1$ und $\beta = 3$.

(c) $\alpha = 3$ und $\beta = 2$.

√ (d) $\alpha = 3$ und $\beta = 3$.

Wir verwenden $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = 0$.

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xz^\alpha r \\ yz^\beta r \\ z^2 r^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3yz^2 r - \beta y z^{\beta-1} r \\ \alpha x z^{\alpha-1} r - 3xz^2 r \\ xyz^\beta r^{-1} - xyz^\alpha r^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = \beta = 3.$$

Somit ist (d) die richtige Antwort.

3. Ein Vektorfeld $\vec{v}$ heisst quellenfrei wenn $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ und wirbelfrei wenn $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ gilt. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Quellenfreie Vektorfelder sind auch wirbelfrei.

(b) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ sind quellenfrei.

√ (c) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{w}$ sind quellenfrei.

(d) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{w}$ sind wirbelfrei.

Die Aussage (c) ist richtig, da $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{w} = 0$.

Die Aussage (a) ist falsch, da beispielsweise das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = (-y, x, 0)$ quellenfrei aber nicht wirbelfrei ist:

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0\,, \quad \operatorname{rot}\vec{v} = (0,\ 0,\ 2).$$

Die Aussage (b) ist falsch, da

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \Delta f$$

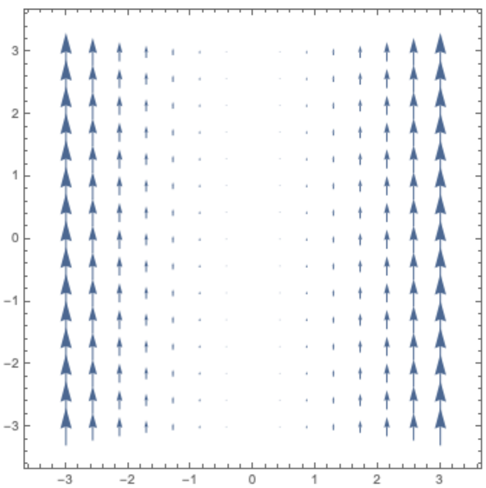
nicht immer Null ist.

Die Aussage (d) ist falsch, da für $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ der Term

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{w} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{w} - (\Delta w_1, \Delta w_2, \Delta w_3)$$

nicht immer gleich Null ist.

4. Welches Vektorfeld passt zu dieser Zeichnung?



(a) $\vec{v} = (y, x)$

(b) $\vec{v} = (0, x)$

√ (c) $\vec{v} = (0, x^2)$

(d) $\vec{v} = (x^2, 1)$

Die Vektoren sind vertikal, also haben keine x-Komponente. Dies schliesst (a) und (d) aus. Die richtige Anwort ist (c), denn im Punkt (x, y) mit $x < 0$ zeigt $\vec{v}(x, y)$ nach oben, d.h. die y-Komponente ist positiv.

5. Die Fläche S sei einerseits durch die Parameterdarstellung $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$ und andererseits durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben. Wir betrachten einen festen Punkt P_0 mit Ortsvektor (u_0, v_0) auf der Fläche S. Dann gilt: Die Vektoren $\text{grad}(f(P_0))$ und $\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$

(a) sind gleich.

(b) sind entgegengesetzt gleich.

√ (c) sind parallel.

(d) stehen senkrecht aufeinander.

(e) sind weder parallel noch stehen sie senkrecht aufeinander.

Wir wissen aus IV.7, dass der Gradient senkrecht auf der Niveaufläche $f(x, y, z) = 0$ steht. Aus VI.3 wissen wir, dass das Vektorprodukt $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ senkrecht auf der Fläche S steht. Folglich müssen die beiden Vektoren parallel sein. Sie müssen nicht gleich oder entgegengesetzt gleich sein (wir können f, und damit den Gradienten von f, beliebig reskalieren und erhalten die gleiche Fläche S).

6. Es sei eine Fläche durch die Parameterdarstellung $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$ gegeben. Der Vektor $\vec{n}(u, v)$ bezeichnet den Normaleneinheitsvektor zur Fläche. Es bezeichne P_0 den Punkt auf der Fläche, der zu (u_0, v_0) gehört. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Der Vektor $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ liegt in einer Tangentialebene zur Fläche im Punkte P_0.

√ (b) Wenn $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ und $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ linear unabhängig sind, dann spannen sie die Tangentialebene zur Fläche im Punkte P_0 auf.

(c) $\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$.

√ (d) Der Vektor $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ ist tangential an die u-Linie, die durch P_0 geht.

Aussagen (a) und (b) stimmen, da die Tangentialebene durch die Vektoren $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ und $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ aufgespannt wird.

Aussage (d) stimmt, da $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ gerade die Richtungsableitung entlang der u-Linie ist.

Die einzig falsche Aussage ist (c), denn

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \pm \frac{\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)}{|\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)|}.$$

Offene Aufgaben

7. Es seien a und c Konstanten. Das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = c\left(1 - a^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, -a^2\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, 0\right)$$

beschreibt die Strömung einer idealen Flüssigkeit um einen Zylinder vom Radius a, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt (siehe dazu die Abbildung und eine animierte Visualisierung unter folgendem Link: `https://tinyurl.com/ethanalysis-laminarflow`).

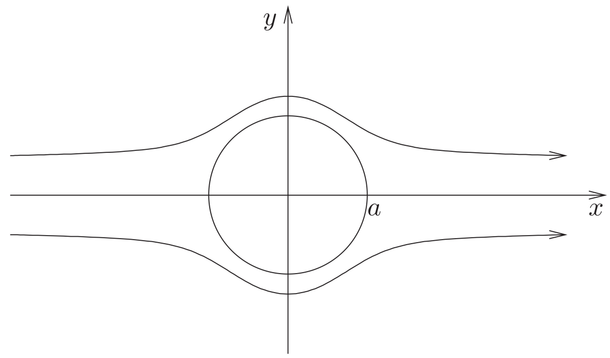
(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ und

(b) dass $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ gilt,

(c) dass an der Oberfläche des Zylinders die Strömung tangential verläuft und

(d) dass in grosser Entfernung vom Zylinder das Vektorfeld nahezu homogen ist.

(e) Bestimmen Sie weiters die Punkte maximaler und minimaler Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche.



Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{v} &= c\left(-a^2\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)4x}{(x^2+y^2)^3} - a^2\frac{2x(x^2+y^2)-2xy4y}{(x^2+y^2)^3}\right)\\ &= -ca^2\left(\frac{2x^3+2xy^2-4x^3+4xy^2+2x^3+2xy^2-8xy^2}{(x^2+y^2)^3}\right) = 0.\end{aligned}$$

(b) Klar ist, dass die 1. und 2. Komponente von $\operatorname{rot}\vec{v}$ verschwinden.

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}\vec{v})_3 &= c\left(-a^2\frac{2y(x^2+y^2)-2xy4x}{(x^2+y^2)^3} + a^2\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)4y}{(x^2+y^2)^3}\right)\\ &= ca^2\left(\frac{-2x^2y-2y^3+8x^2y-2x^2y-2y^3-4x^2y+4y^3}{(x^2+y^2)^3}\right) = 0.\end{aligned}$$

(c) Es sei $P = (x_0, y_0, z_0)$ ein Punkt auf der Zylinderoberfläche, d. h. $x_0^2 + y_0^2 = a^2$. Der Tangentialvektor $\vec{T}$ in P parallel zur xy-Ebene ist gegeben durch $\vec{T} = (-y_0, x_0, 0)$.

$$\vec{v}(x_0,y_0,z_0) = c\left(1 - a^2\frac{a^2-y_0^2-y_0^2}{a^4}, -a^2\frac{2x_0y_0}{a^4}, 0\right) = c\left(\frac{2y_0^2}{a^2}, \frac{-2x_0y_0}{a^2}, 0\right) = -\frac{2cy_0}{a^2}\cdot\vec{T}$$

Das heisst $\vec{v} \parallel \vec{T}$.

(d) Es sei $P = (x, y, z)$ ein Punkt im Abstand R von der z-Achse, d. h. $x^2 + y^2 = R^2$. Dann gilt

$$|x^2-y^2| \le x^2+y^2 \quad \text{und} \quad \frac{a^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{a^2(x^2-y^2)}{R^4} \to 0 \quad \text{für} \quad R\to\infty$$

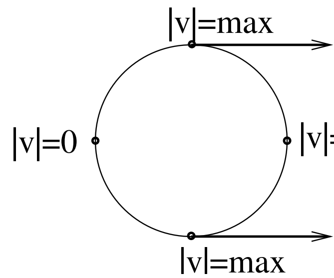
$$|2xy| \le x^2+y^2 \quad \text{und} \quad \frac{a^2 2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{a^2 2xy}{R^4} \to 0 \quad \text{für} \quad R\to\infty$$

Also strebt $\vec{v} \to (c, 0, 0)$ für $R \to \infty$.

(e) Aus c) folgt für den Betrag der Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche

$$|\vec{v}| = \left|-\frac{2c}{a^2}y_0\right||\vec{T}| = 2|c|\left|\frac{y_0}{a}\right|.$$

Man sieht sofort, dass $|\vec{v}|$ auf der x-Achse minimal und auf der y-Achse maximal ist.



8. Gegeben ist das zweidimensionale Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \big(x^2 - y^2, 2xy\big)$. Zeigen Sie, dass die Kreise, welche die x-Achse im Ursprung berühren, Feldlinien sind und bestimmen Sie die Koordinaten der zugehörigen Kreismittelpunkte.

Lösung: $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_0 \neq 0$. Der Kreis K durch (x_0, y_0), welcher die x-Achse in $(0,0)$ berührt, ist von der Form

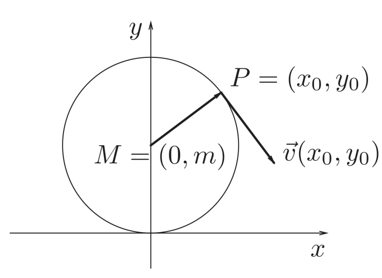
$$K \;:\; x^2 + (y-m)^2 = m^2 \qquad \text{oder} \qquad x^2 + y^2 - 2\,m\,y = 0.$$

Mit $(x_0, y_0) \in K$ erhalten wir $m = \dfrac{x_0^2 + y_0^2}{2\,y_0}$.

Sei $M = (0, m)$ der Mittelpunkt des Kreises. Wir müssen nun zeigen, dass $\overrightarrow{MP} \cdot \vec{v}(x_0, y_0) = 0$ gilt.

$$\overrightarrow{MP} \cdot \vec{v}(x_0,y_0) = (x_0, y_0 - m) \cdot \vec{v}(x_0,y_0) = \left(x_0\,,\ \frac{y_0^2 - x_0^2}{2\,y_0}\right) \cdot \big(x_0^2 - y_0^2, 2\,x_0 y_0\big) = 0$$

Bemerkung: Eine weitere Feldlinie ist die x-Achse.



9. Ein ebenes Vektorfeld $K(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ wird *harmonisch* genannt, falls

$$\operatorname{div} K = P_x + Q_y = 0 \text{ und } \operatorname{rot} K = Q_x - P_y = 0.$$

Ferner bezeichne K_α das Feld, das entsteht, wenn jeder Feldvektor eines Feldes K um den Winkel α gedreht wird.

Das Feld K sei harmonisch. Zeigen Sie, dass dann auch K_α harmonisch ist.

Hinweis: Ist (x,y) ein Punkt in der Ebene, so berechnet sich der um den Winkel α gedrehte Punkt durch

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es sei das Vektorfeld $K(x,y) = (P,Q)$ harmonisch. Das um den Winkel α gedrehte Vektorfeld K_α hat die Komponenten

$$K_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot P - \sin\alpha \cdot Q \\ \sin\alpha \cdot P + \cos\alpha \cdot Q \end{pmatrix}.$$

Die Divergenz von K_α berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \operatorname{div} K_\alpha &= \frac{\partial}{\partial x}(\cos\alpha \cdot P - \sin\alpha \cdot Q) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin\alpha \cdot P + \cos\alpha \cdot Q) \\ &= \cos\alpha \cdot (P_x + Q_y)s - \sin\alpha \cdot (Q_x - P_y) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da K harmonisch ist. Analog berechnet sich die Rotation von K_α zu

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} K_\alpha &= \frac{\partial}{\partial x}(\sin\alpha \cdot P + \cos\alpha \cdot Q) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos\alpha \cdot P - \sin\alpha \cdot Q) \\ &= \cos\alpha \cdot (Q_x - P_y) + \sin\alpha \cdot (P_x + Q_y) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Folglich ist das gedrehte Vektorfeld K_α ebenfalls harmonisch.

10. Eine Gerade geht durch den Punkt $(1,0,0)$ und hat den Richtungsvektor $(0,1,1)$. Lässt man sie um die z-Achse rotieren, so erzeugt sie eine Fläche *(einschaliges Rotationshyperboloid)*.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Fläche an.

(b) Bestimmen Sie die Gleichung dieser Fläche.

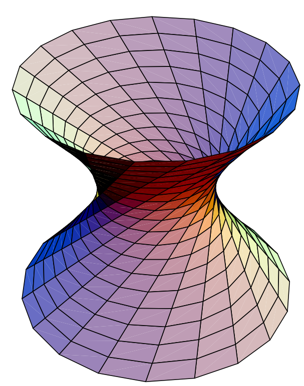
(c) In welchen Punkten der Fläche ist der Normalenvektor parallel zur Richtung des Vektors $(1,1,-1)$?

(d) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 2$.

Lösung:

(a) Eine Parameterdarstellung der Geraden ist gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} \qquad -\infty < t < \infty.$$



Als zweiten Parameter für die Flächendarstellung wählt man den Drehwinkel φ der Drehung um die z-Achse, deren Matrix durch

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. So erhält man für die Parameterdarstellung der Fläche

$$\vec{r}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi - t\sin\varphi \\ \sin\varphi + t\cos\varphi \\ t \end{pmatrix} \qquad -\infty < t < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

(b) Aus der Parameterdarstellung folgt $z = t$. Dies eingesetzt führt zu

$$x = \cos\varphi - z\sin\varphi, \quad y = \sin\varphi + z\cos\varphi \quad \text{und daraus} \quad x^2 + y^2 = 1 + z^2.$$

Die Gleichung der Fläche lautet also $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(c) Der Gradient $(2x, 2y, -2z)$ der Flächengleichung steht senkrecht zur Fläche. Also

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow y = z \;\&\; z = x.$$

Da der Punkt auf der Fläche sein soll, folgt $x^2 + y^2 - z^2 = x^2 = 1$ und somit $x = \pm 1$. Man erhält somit die beiden Punkte $P_1 = (1, 1, 1)$ und $P_2 = (-1, -1, -1)$.

(d) Man berechnet den Betrag des Normalenvektors

$$|\vec{r}_t \times \vec{r}_\varphi| = \left| \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi - t\cos\varphi \\ \cos\varphi - t\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\cos\varphi + t\sin\varphi \\ -\sin\varphi - t\cos\varphi \\ t \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + 2t^2}$$

und erhält für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + 2t^2}\, dt\, d\varphi = 2\pi \int_0^2 \sqrt{1 + 2t^2}\, dt \\ &= 2\pi \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \left[\sqrt{2}\, t \sqrt{1 + 2t^2} + \log(\sqrt{2}\, t + \sqrt{1 + 2t^2}) \right]_0^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \big(\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 3 + \log(\sqrt{2} \cdot 2 + 3) \big) \\ &= 6\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \log\big(3 + 2\sqrt{2}\big) \approx 22.77\,. \end{aligned}$$

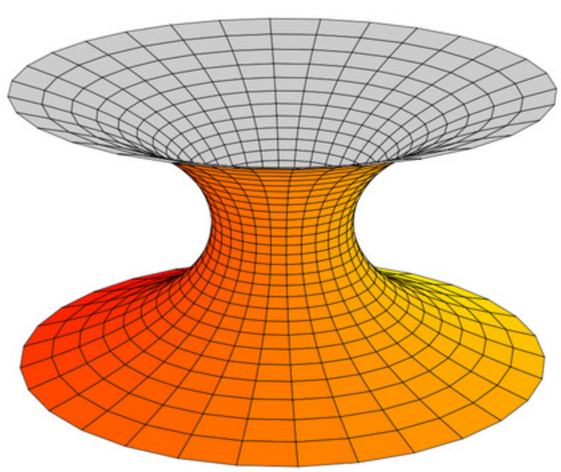
11. Eine Rotationsfläche $M \subset \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(u, v) = (\cosh(v)\cos(u),\, \cosh(v)\sin(u),\, v)\,,$$

mit $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1]$. Die Fläche M heisst Katenoid und ist eine sogenannte Minimalfläche. (Eine Minimalfläche einer Kurve ist eine Fläche, deren Rand gerade die Kurve ist und gleichzeitig unter solchen Flächen ein lokales Minimum im Flächeninhalt hat.)

(a) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt $A(M)$.

(b) Verifizieren Sie, dass der Flächeninhalt eines Zylindermantels mit Radius $\cosh 1$ und Höhe 2 grösser ist als $A(M)$.



Lösung:

(a) Wir bestimmen das Obeflächenelement:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_u(u,v) &= (-\cosh v \sin u,\ \cosh v \cos u,\ 0)\\
\vec{r}_v(u,v) &= (\sinh v \cos u,\ \sinh v \sin u,\ 1)\\
\left(\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right)(u,v) &= (\cosh v \cos u,\ \cosh v \sin u,\ -\sinh v \cosh v)\\
\left\|\left(\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right)(u,v)\right\|^2 &= \cosh^2 v \left(\cos^2 u + \sin^2 u\right) + \sinh^2 v \cosh^2 v = \cosh^2 \left(1 + \sinh^2 v\right) = \cosh^4 v\\
\Longrightarrow \mathrm{d}A &= \cosh^2 v \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

Dann ist der Oberflächeninhalt des Katenoides:

$$
\begin{aligned}
A(M) &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \cosh^2 v \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 2\pi \int_{-1}^{1} \cosh^2 v \,\mathrm{d}v = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{1+\cosh 2v}{2}\,\mathrm{d}v\\
&= 2\pi\left(1 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cosh 2v \,\mathrm{d}v\right) = 2\pi\left(1 + \int_{0}^{1} \cosh 2v \,\mathrm{d}v\right)\\
&= 2\pi\left(1 + \frac{1}{2}\sinh 2\right) = (2 + \sinh 2)\,\pi \approx 5.6269\pi
\end{aligned}
$$

(b) Der Flächeninhalt eines Zylindermantels mit Radius $\cosh 1$ und Höhe 2 beträgt $(4\cosh 1)\pi \approx 6.1723\pi$.