Lösung Serie 19

MC-Aufgaben

1. Der Oberflächeninhalt des Graphs $z = f(x, y)$ einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist

(a) $\displaystyle\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

√ (b) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(c) $\displaystyle\iint_D |f_x(x, y) \times f_y(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Eine Parametrisierung des Graphs ist durch

$$(x, y) \mapsto \vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

gegeben. Es gilt

$$\vec{r}_x(x, y) = (1, 0, f_x(x, y))$$
$$\vec{r}_y(x, y) = (0, 1, f_y(x, y))$$
$$\vec{r}_x(x, y) \times \vec{r}_y(x, y) = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1).$$

Daher

$$dA = \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\,dxdy$$

und

$$A = \iint_D \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}\,dxdy.$$

2. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v}\colon (x,y,z) \mapsto \big(x, y^2+z, 3x\big)$$

durch das Dreieck D mit Ecken $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$ in Richtung $\vec{n} = (0,0,1)$.

√ (a) $\frac{1}{2}$

(b) 3

(c) $-\frac{1}{2}$

$D = \{(x,y,0) \mid x \in [0,1],\ y \in [0,1-x]\}$.
Der Fluss ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_D \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\mathrm{d}A \\ &= \int_0^1\int_0^{1-x} \begin{pmatrix} x \\ y^2+0 \\ 3x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^{1-x} 3x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= 3\int_0^1 x((1-x)-0)\,\mathrm{d}x = 3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. Es sei B die Einheitskugel um den Ursprung. Für welches der Vektorfelder $(x,y,z) \mapsto \vec{v}(x,y,z)$ darf der Divergenzsatz für den Bereich B *nicht* angewendet werden?

(a) $\vec{v}(x,y,z) = (x,y,z)$

√ (b) $\vec{v}(x,y,z) = C \cdot \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ (wobei $\vec{r} = (x,y,z)$ ist)

(c) $\vec{v}(x,y,z) = (xyz, x^2z^2, x^3ze^y)$

(d) $\vec{v}(x,y,z) = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (wobei $\vec{\omega}$ ein beliebiger Vektor ist)

(e) $\vec{v}(x,y,z) = \vec{a}$ (wobei $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor ist)

√ (f) $\vec{v}(x,y,z) = (\ln x, \ln y, \ln z)$

Der Divergenzsatz darf im Fall von

$$\vec{v} = C \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

bzw.

$$\vec{v} = (\ln x, \ln y, \ln z)$$

für den Bereich B nicht angewendet werden, da $(0,0,0)$ nicht im Definitionsbereich von $\vec{v}$ und daher auch nicht im Definitionsbereich von $\operatorname{div}\vec{v}$ liegt. Dafür ist das Coulombsche Feld ein Beispiel.

4. Welche der folgenden fünf Aussagen ist logisch unabhängig von den anderen vieren? (Das heisst, welche Aussage folgt nicht aus einer anderen und hat auch keine der anderen Aussagen als Konsequenz?)

(a) Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist quellenfrei.

(b) Der Fluss Φ von $\vec{v}$ durch irgend eine geschlossene Fläche ist Null.

(c) div $\vec{v} = 0$.

√ (d) rot $\vec{v} = (0, 0, 0)$.

(e) Das Vektorfeld $\vec{v}$ könnte das Strömungsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit sein.

Die ersten drei Aussagen sind mit Hilfe des Divergenzsatzes äquivalent.
Wie im Stammbach Analysis Buch, Teil B, Kapitel VI, Abschnitt 6, sei

$$\rho\colon (x, y, z, t) \mapsto \rho(x, y, z, t)$$

die Dichte des Mediums im Punkt (x, y, z) zur Zeit t. Im Fall einer Strömung eines inkompressiblen Mediums ist ρ zeitlich und örtlich konstant. Dann gilt

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v},$$

so dass sich die Kontinuitätsgleichung

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

in diesem Fall auf die Aussage

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

reduziert.
Um weiters zu sehen, dass $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ nicht $\operatorname{rot} \vec{v} = (0, 0, 0)$ impliziert, betrachten wir das Vektorfeld

$$\vec{v} = (x + y, x - y - 5z, 0)\,.$$

Dann ist $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, aber $\operatorname{rot} \vec{v} = (5, 0, 0)$. Zuletzt, sehen wir dass $\operatorname{rot} \vec{v} = (0, 0, 0)$ nicht $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ impliziert. Wir betrachten dazu das Vektorfeld

$$\vec{v} = (x, y, z)\,.$$

Dann ist $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$, aber $\operatorname{div} \vec{v} = 3$.

Offene Aufgaben

5. Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = (1-x, 1-y, 1+z)$$

sowie die Fläche S mit der Parameterdarstellung

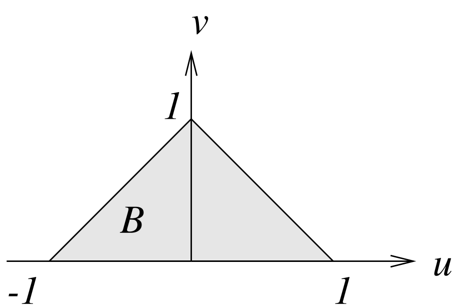
$$(u,v) \mapsto \vec{r}(u,v) = (u-v, u+v, uv)$$

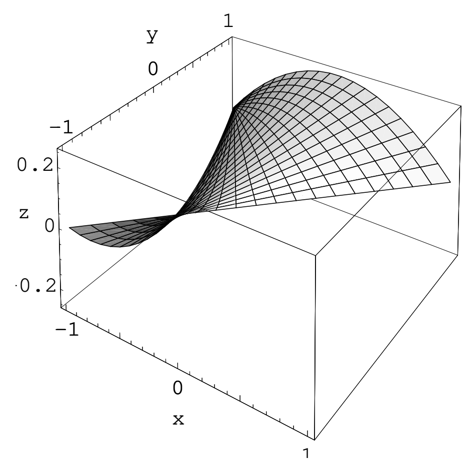
und dem Parameterbereich

$$B = \big\{(u,v) \bigm| 0 \le v \le 1,\ |u| \le 1-v\big\}.$$

Berechnen Sie den Fluss des Feldes $\vec{v}$ von oben nach unten durch die Fläche S.

Lösung:





Für den Fluss $\Phi = \iint\limits_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A$ berechnet man den Normalenvektor

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (1,\, 1,\, v) \times (-1,\, 1,\, u) = (u-v,\, -u-v,\, 2)\,,$$

der nach oben zeigt. So erhält man für den Fluss durch die Sattelfläche S

$$\Phi = -\iint\limits_B \vec{v}\big(\vec{r}(u,v)\big) \cdot \big(\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)\big)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = -\int\limits_0^1 \int\limits_{v-1}^{1-v} \begin{pmatrix} 1-u+v \\ 1-u-v \\ 1+uv \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u-v \\ -u-v \\ 2 \end{pmatrix}^T \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$

$$= -\int\limits_0^1 \int\limits_{v-1}^{1-v} 2\,(3uv - v + 1)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = -2\int\limits_0^1 \Big[\tfrac{3}{2}u^2 v - uv + u\Big]_{v-1}^{1-v} \mathrm{d}v = -4\int\limits_0^1 (v-1)^2\, \mathrm{d}v = -\frac{4}{3}\ .$$

6. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v}(x,y,z) = (x,y,z)$ durch das Paraboloid

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

von oben nach unten.

Lösung: 1. Methode: *direkt.*
Eine Parameterdarstellung des Paraboloids P ist durch

$$(u,v) \mapsto \vec{r}(u,v) = (u, v, u^2 + v^2),$$

gegeben, mit (u,v) in der Einheitsscheibe. Es gilt:

$$\vec{r}_u(u,v) = (1, 0, 2u)$$
$$\vec{r}_v(u,v) = (0, 1, 2v)$$
$$\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v) = (-2u, -2v, 1).$$

Also der Fluss durch P von oben nach unten ist gleich

$$\begin{aligned}\Phi_P &= \iint_P \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA = \iint_P \vec{v}(\vec{r}(u,v)) \cdot (-\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v))\, dudv \\ &= \iint_P \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ -1 \end{pmatrix} dudv = \int\int_P (u^2+v^2) dudv.\end{aligned}$$

Mit Polarkoordinaten bekommen wir

$$\Phi_P = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\phi = \frac{\pi}{2}.$$

2. Methode: *Gauss'scher Divergenzsatz.*
Nach dem Gauss'schen Divergenzsatz ist der Fluss von $\vec{v}$ von innen nach aussen durch die berandende Fläche ∂B des gefüllten Paraboloids B gleich dem Volumenintegral der Divergenz von $\vec{v}$ über den Berech B. Die Divergenz von $\vec{v}$ ist gleich

$$\operatorname{div} \vec{v}(x,y,z) = 3,$$

und also der Fluss

$$\Phi_B = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v}\, dV = 3\operatorname{vol}(B) \overset{(*)}{=} 3 \int_0^1 z\pi dz = \frac{3}{2}\pi,$$

wobei wir für (*) benutzt haben, dass auf der Höhe z eine Scheibe vom Radius $\sqrt{z}$ liegt, also eine Fläche von $\pi \cdot (\sqrt{z})^2 = \pi z$.

Die berandende Fläche ∂B des gefüllten Paraboloids B besteht aus einem Kreis zur Höhe 1

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ z = 1\}$$

und aus dem Paraboloid

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Sei Φ_K der Fluss durch K (von unten nach oben) und Φ_P der gesuchten Fluss durch P (von oben nach unten). Es gilt:

$$\Phi_P + \Phi_K = \Phi_B,$$

und also

$$\Phi_P = \Phi_B - \Phi_K.$$

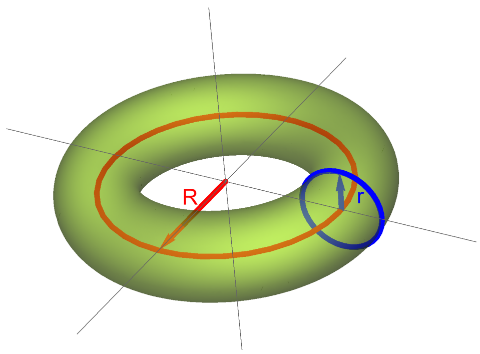
Berechnen wir noch den Fluss durch K. Mit $\vec{n}(x,y,z) = (0,0,1)$ rechnen wir den Fluss von unten nach oben aus:

$$\Phi_K = \iint_K \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \iint_K 1 dx dy = \pi,$$

da auf K ist $z = 1$ und da die Fläche des Kreises K vom Radius 1 gleich π ist.
Der gesuchten Fluss durch P, von oben nach unten, ist also gleich

$$\Phi_P = \frac{3}{2}\pi - \pi = \frac{\pi}{2}.$$

7. Berechnen Sie die Oberfläche eines Rotationstorus mit grossem Radius R und kleinem Radius $r < R$ (siehe Abbildung).



Lösung: Ein Rotationstorus ist die Menge aller Punkte in $\mathbb{R}^3$, die von einem Kreis mit Radius R den Abstand r besitzen (das funktioniert für $0 < r < R$). Wir zeigen zwei Methoden, um die Parametrisierung der Torusoberfläche zu finden.

1. Methode Der grosse Kreis mit Radius R in der xy-Ebene ist parametrisiert durch

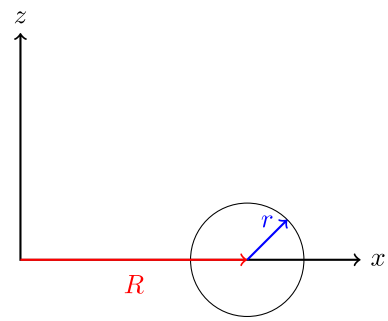
$$(R\cos\phi, R\sin\phi, 0), \quad \text{für } \phi \in [0, 2\pi].$$

Ein kleiner Kreis mit Radius r hat einen Mittelpunkt $\vec{p} = (R\cos\phi, R\sin\phi, 0)$ für ein festes ϕ und liegt in der Ebene, die durch $\vec{p}$ und $(0,0,1)$ aufgespannt ist. Damit ist der kleine Kreis parametrisiert durch

$$\begin{aligned}
\vec{t}(\phi,\alpha) &= \vec{p} + r\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\cos\alpha + r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\sin\alpha \\
&= \begin{pmatrix}R\cos\phi\\R\sin\phi\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\cos\phi\\\sin\phi\\0\end{pmatrix}\cos\alpha + \begin{pmatrix}0\\0\\r\sin\alpha\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}(R + r\cos\alpha)\cos\phi\\(R + r\cos\alpha)\sin\phi\\r\sin\alpha\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

mit $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Lassen wir nun auch ϕ wieder laufen, so erhalten wir die gesuchte Parametrisierung der Oberfläche.

2. Methode Wir fassen die Torusoberfläche als Rotationskörper um die z-Achse auf eines Kreises mit Radius r und Mittelpunkt $(R,0,0)$ in der xz-Ebene auf.



Die Rotation um die z-Achse um den Winkel ϕ ist durch folgende Rotationsmatrix gegeben:

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Kreis mit Radius r um $(R, 0, 0)$ wird durch

$$\vec{c}(\alpha) := \begin{pmatrix} R + r\cos(\alpha) \\ 0 \\ r\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

parametrisiert. Um die Torusoberfläche zu parametrisieren, wenden wir die Rotation um die z-Achse auf die Punkte des Kreises an:

$$\vec{t}(\phi, \alpha) = M(\phi) \cdot \vec{c}(\alpha) = \begin{pmatrix} (R + r\cos(\alpha))\cos(\phi) \\ (R + r\sin(\alpha))\sin(\phi) \\ r\sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Flächeninhalt Um den Flächeninhalt zu bestimmen, berechnen wir

$$\vec{t}_\phi(\phi, \alpha) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\alpha)\sin\phi \\ (R + r\cos\alpha)\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_\alpha(\phi, \alpha) = \begin{pmatrix} -r\sin\alpha\cos\phi \\ -r\sin\alpha\sin\phi \\ r\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} |\vec{t}_\phi \times \vec{t}_\alpha| &= \left| \begin{pmatrix} r(R + r\cos\alpha)\cos\alpha\cos\phi \\ r(R + r\cos\alpha)\cos\alpha\sin\phi \\ r(R + r\cos\alpha)\sin\alpha(\cos^2\phi + \sin^2\phi) \end{pmatrix} \right| \\ &\overset{(*)}{=} r(R + r\cos\alpha) \left| \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\phi \\ \cos\alpha\sin\phi \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right| = r(R + r\cos\alpha) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} A = \iint_S \mathrm{d}A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\vec{t}_\phi \times \vec{t}_\alpha| \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r\cos\alpha) \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\alpha \\ &= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r\cos\alpha) \mathrm{d}\alpha \\ &= 2\pi r \left[R\alpha + r\sin\alpha \right]_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} = 4\pi^2 Rr. \end{aligned}$$

Interessanterweise entspricht dies dem Mantelflächeninhalt eines Zylinders mit Radius r und Höhe $2\pi R$, also dem *aufgebogenen* Torus.

Beachte: Im Schritt $(*)$ dürfen wir die Betragsstriche weglassen, da $R+r\cos\alpha$ immer positiv ist; konkret gilt

$$R + r\cos\alpha \geq R - r > 0.$$

8. Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x,y,z) \longmapsto \left(\frac{1}{3}x^3 - xz, xy + yz, y^2 z - xz\right)$$

von innen nach aussen durch die Oberfläche des geraden Kreiskegels mit Spitze in $(0,0,2)$ und Grundfläche $\{(x,y,z) \,|\, z = 0\,,\ x^2+y^2 \leq 4\}$.

Lösung: Sei F die Oberfläche des geraden Kreiskegels und sei K der Kegel. Wir werden den Divergenzsatz anwenden: Es gilt

$$\operatorname{div}\vec{v}\,(x,y,z) = \left(x^2 - z\right) + (x+z) + \left(y^2 - x\right) = x^2 + y^2,$$

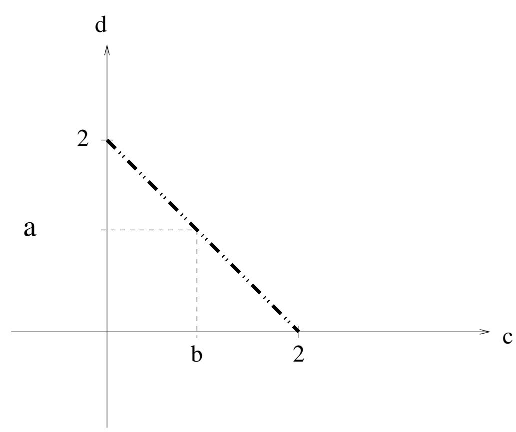
und der Gauss'sche Satz liefert damit

$$\Phi = \iint_F \vec{v}\cdot\vec{n}\,dA = \iiint_K \operatorname{div}\vec{v}\,dV = \iiint_K \left(x^2+y^2\right) dV.$$

Wir benützen Zylinderkoordinaten:

$$x = \rho\cos\varphi\ \ ,\ y = \rho\sin\varphi\ \ ,\ z = z\ \text{ mit }\ 0 \leq \rho < \infty\,,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\,,\ z \in \mathbb{R}$$

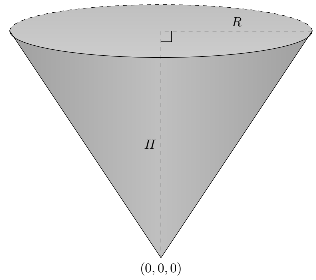
Es folgt $dV = \rho\, d\rho d\varphi dz$ und $x^2+y^2 = \rho^2$. Um die ρ–Integrationsgrenze zu bestimmen, betrachten wir



Es gilt $0 \leq \rho \leq 2 - z$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Phi &= \iiint_K \left(x^2+y^2\right) dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-z} \rho^2 \cdot \rho\, d\rho d\varphi dz = 2\pi \int_0^2 \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2-z} dz \\ &= 2\pi \int_0^2 \frac{(2-z)^4}{4} dz = 2\pi \left[-\frac{(2-z)^5}{20}\right]_0^2 = 2\pi\left[0 + \frac{2^5}{20}\right] = \frac{16}{5}\pi.\end{aligned}$$

9. Gegeben sei eine Strömung mit Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = (2x^2, y, 1-z)$.
Welche Menge strömt (von aussen nach innen) pro Zeiteinheit durch die Mantelfläche des geraden Kreiskegels mit Radius R und Höhe H parallel zur z-Achse mit Spitze im Ursprung?



Lösung: Parametrisierung der Kegelmantelfläche

$$\vec{s}(r,\phi) = \begin{pmatrix} x(r,\phi) \\ y(r,\phi) \\ z(r,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,\cos\phi \\ r\,\sin\phi \\ \frac{H}{R}r \end{pmatrix}, \quad 0 \le r \le R,\ 0 \le \phi \le 2\pi$$

mit

$$\vec{s}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ \frac{H}{R} \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_\phi = \begin{pmatrix} -r\,\sin\phi \\ r\,\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_r \times \vec{s}_\phi = \begin{pmatrix} -\frac{rH}{R}\cos\phi \\ -\frac{rH}{R}\sin\phi \\ r \end{pmatrix}$$

Dies ist der Normalenvektor auf der Mantelfläche, der nach innen zeigt. Der Fluss ins Innere des Kegels ist dann

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \vec{v}(\vec{s}(r,\phi)) \cdot (\vec{s}_r \times \vec{s}_\phi)\,dr\,d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R \begin{pmatrix} 2r^2\cos^2\phi \\ r\sin\phi \\ 1-\frac{H}{R}r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{rH}{R}\cos\phi \\ -\frac{rH}{R}\sin\phi \\ r \end{pmatrix} dr\,d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R -2\frac{H}{R}r^3\cos^3\phi - \frac{H}{R}r^2\sin^2\phi + r - \frac{H}{R}r^2\,dr\,d\phi \\
&= -\frac{1}{2}R^3H\int_0^{2\pi}\cos^3(\phi)d\phi - \frac{1}{3}R^2H\int_0^{2\pi}\sin^2(\phi)d\phi + \left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{3}R^2H\right)\int_0^{2\pi}d\phi \\
&= -\frac{1}{3}R^2H\pi + \left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{3}R^2H\right)2\pi \\
&= R^2\pi - R^2H\pi
\end{aligned}$$

Variante: Man kann auch den Divergenzsatz benutzen. Es gilt $\operatorname{div}\vec{v} = 4x$ und für den gesamten Kegel K erhält man (mit Zylinderkoordinaten)

$$\Phi_K = \iint_{\partial K} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dA = \iiint_K \operatorname{div}\vec{v}\,dV = \int_0^H\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{R}{H}z} 4r\cos\phi\cdot r\,dr d\phi dz = 0.$$

Dies ist gleich Null, da $\int_0^{2\pi}\cos\phi\,d\phi$ verschwindet. Berechnen wir noch den Fluss durch die Deckfläche D des Kegels (von aussen nach innen, d.h. von oben nach unten). Wir benutzen die Parametrisierung $\vec{r}(\rho,\phi) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, H)$, $0 \le \rho \le R$, $0 \le \phi \le 2\pi$ von D mit Normalenvektor $\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\phi = (0,0,\rho)$, der nach oben zeigt. Also müssen wir ihn drehen und erhalten

$$\begin{aligned}
\Phi_D = \iint_D \vec{v}\cdot\vec{n}\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \vec{v}(\vec{r}(\rho,\phi))\cdot(0,0,-\rho)\,d\rho d\phi \\
&= 2\pi\int_0^R (H-1)\rho\,d\rho = \pi(H-1)R^2.
\end{aligned}$$

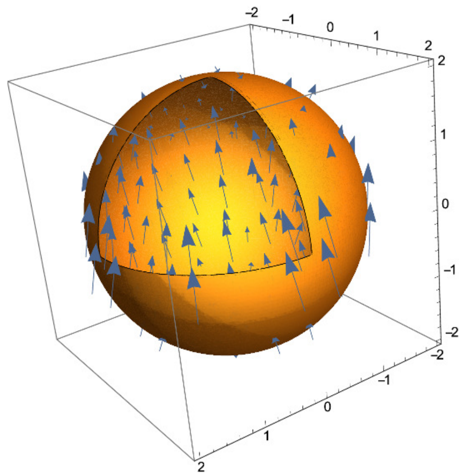
Der Fluss durch den Mantel ist gemäss dem Divergenzsatz also $-\pi(H-1)R^2$, weil der Gesamtfluss Null ist. [1] Das bestätigt das Resultat bei der ersten Variante.

10. Sei $R > 0$ fest gewählt. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

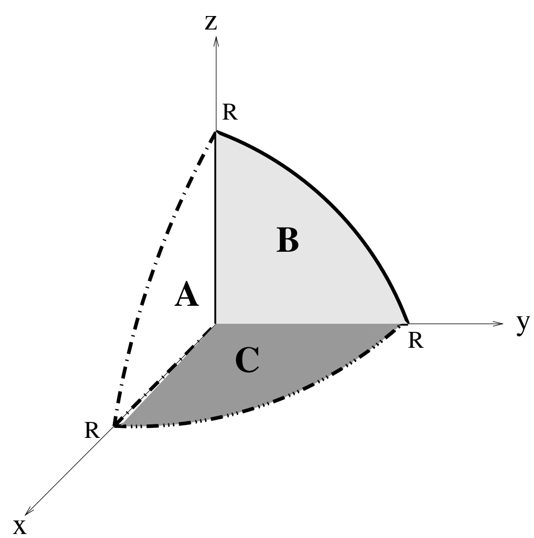
$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(R\left(y^2+z^2\right), R^2\left(x^2+z^2\right), R^3\left(x^2+y^2\right)\right)$$

von innen nach aussen durch die Oberfläche

$$E := \left\{(x, y, z)\,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = R^2, x \leq 0 \,\text{oder}\, y \leq 0 \,\text{oder}\, z \leq 0\right\}.$$



Lösung: Betrachte die folgende Skizze (die Kurven sind Kreisbögen mit Radius R und Zentrum im Ursprung):



Wir berechnen den Fluss durch die folgenden Flächen A, B respektive C in Richtung $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ respektive $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[1] Bei einer Strömung ist zu erwarten, dass der Gesamtfluss verschwindet. Zumindest wenn es sich um Flüssigkeiten handelt, diese sind normalerweise inkompressibel.

Berechne zuerst den Fluss Φ_1 durch A: Dazu führen wir Polarkoordinaten ein: $x = r\cos\varphi$ und $z = r\sin\varphi$. Es folgt

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \iint_A \vec{v}\cdot\vec{n}_1\, dA = \iint_A R^2\left(x^2+z^2\right) dA = R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R r^2\cdot r dr d\varphi \\ &= R^2\frac{\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi R^6}{8}.\end{aligned}$$

Berechne den Fluss Φ_2 durch B: Wir benutzen Polarkoordinaten $y = r\cos\varphi$ und $z = r\sin\varphi$. Es folgt

$$\Phi_2 = \iint_B \vec{v}\cdot\vec{n}_2\, dA = \iint_A R\left(y^2+z^2\right) dA = R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R r^2\cdot r dr d\varphi = \frac{\pi R^5}{8}.$$

Berechne nun den Fluss Φ_3 durch C: Mit Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ folgt

$$\Phi_3 = \iint_C \vec{v}\cdot\vec{n}_3\, dA = \iint_A R^3\left(x^2+y^2\right) dA = R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R r^2\cdot r dr d\varphi = \frac{\pi R^7}{8}$$

Es gilt $\operatorname{div}\vec{v}\,(x,y,z) = 0$. Definiere den Körper

$$K := \left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \le R^2\,, x\le 0 \text{ oder } y \le 0 \text{ oder } z \le 0\right\}$$

mit Rand $\partial K = E\cup A\cup B\cup C$. Der Divergenzsatz liefert dann

$$0 = \iiint_K \operatorname{div}\vec{v}\, dV = \iint_E \vec{v}\cdot\vec{n}\, dA + \iint_A \vec{v}\cdot\vec{n}_1\, dA + \iint_B \vec{v}\cdot\vec{n}_2\, dA + \iint_C \vec{v}\cdot\vec{n}_3\, dA$$

Der gesuchte Fluss ist damit

$$\begin{aligned}\iint_E \vec{v}\cdot\vec{n}\, dA &= -\left(\iint_A \vec{v}\cdot\vec{n}_1\, dA + \iint_B \vec{v}\cdot\vec{n}_2\, dA + \iint_C \vec{v}\cdot\vec{n}_3\, dA\right) \\ &= -\frac{\pi}{8}\left(R^5+R^6+R^7\right).\end{aligned}$$

11. Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein endlicher Bereich mit Rand ∂B und seien f, g zweimal stetig differenzierbare Skalarfelder. Beweisen Sie die Greenschen Identitäten, die in der Potentialtheorie und in der Elektrodynamik gebraucht werden.

(a) Erste Greensche Identität

$$\iint_{\partial B} (f \cdot \mathrm{grad} g) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A = \iiint_B (f \cdot \Delta g + \mathrm{grad} f \cdot \mathrm{grad} g)\ \mathrm{d}V$$

Hinweis: Wenden Sie den Divergenzsatz für das Vektorfeld $f \cdot \mathrm{grad} g$ an.

(b) Zweite Greensche Identität

$$\iint_{\partial B} (f \cdot \mathrm{grad} g - g \cdot \mathrm{grad} f) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A = \iiint_B (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f)\ \mathrm{d}V$$

Lösung:

(a) Seien $f : (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z)$ und $g : (x, y, z) \longmapsto g(x, y, z)$ zwei 2-mal stetig differenzierbare Skalarfelder. Wir definieren das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \vec{v}\,(x, y, z) = f(x, y, z) \cdot \mathrm{grad} g\,(x, y, z) \qquad \text{(Hinweis)},$$

und berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{div} \vec{v} &= \mathrm{div}\,(f \cdot \mathrm{grad} g) = \mathrm{div}\,(f\,(g_x, g_y, g_z)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\,(f g_x) + \frac{\partial}{\partial y}\,(f g_y) + \frac{\partial}{\partial z}\,(f g_z) \\
&= f_x g_x + f g_{xx} + f_y g_y + f g_{yy} + f_z g_z + f g_{zz} \\
&= f \cdot \Bigg(\underbrace{g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}}_{\Delta g} \Bigg) + \underbrace{(f_x, f_y, f_z) \cdot (g_x, g_y, g_z)}_{\mathrm{grad} f \cdot \mathrm{grad} g}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Wir wenden nun den Divergenzsatz an und erhalten die erste Greensche Identität

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial B} f \cdot \mathrm{grad} g \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A &= \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A = \iiint_B \mathrm{div} \vec{v}\, dV \\
&\overset{(1)}{=} \iiint_B (f \cdot \Delta g + \mathrm{grad} f \cdot \mathrm{grad} g)\ \mathrm{d}V. \qquad (2)
\end{aligned}$$

(b) Wir ersetzen in Gleichung (2) f durch g und g durch f, und erhalten

$$\iint_{\partial B} g \cdot \mathrm{grad} f \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A = \iiint_B (g \cdot \Delta f + \mathrm{grad} g \cdot \mathrm{grad} f)\ \mathrm{d}V. \qquad (3)$$

Nun „ziehen“ wir von der Gleichung (2) die Gleichung (3) ab. Da

$$\mathrm{grad} g \cdot \mathrm{grad} f = \mathrm{grad} f \cdot \mathrm{grad} g,$$

erhalten wir die zweite Greensche Identität.