Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 20

MC-Aufgaben

1. Die Arbeit W eines Vektorfeldes $\vec{v}$ längs des Geradenstücks von $(1,0,0)$ nach $(-1,-1,-1)$ sei gleich 5. Welches Resultat erhält man, wenn man die Arbeit W' von $\vec{v}$ längs des Geradenstücks von $(-1,-1,-1)$ nach $(1,0,0)$ berechnet?

(a) Die Arbeit W' lässt sich aus den Angaben nicht berechnen.

(b) Die Arbeit W' beträgt ebenfalls 5.

√ (c) Die Arbeit W' beträgt -5.

Wenn γ einen Weg und $-\gamma$ den Weg mit dem umgekehrten Durchlaufsinn bezeichnet, dann gilt

$$\int_{-\gamma} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot (-\mathrm{d}\vec{r}) = -\int_{\gamma} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

Deswegen ist (c) die richtige Antwort.

2. Das Arbeitsintegral $\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ des Vektorfeldes

$$\vec{v}(x,y,z) = \left(e^{y^2} + e^{z^2},\ (2z+1)xe^{z^2} + (2x+1)ye^{y^2},\ xyze^{x^2+y^2}\right)$$

entlang des geschlossenen Weges γ, welcher aus den Seiten des Dreieckes mit den Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(-1,0,0)$ besteht und im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, beträgt:

√ (a) 1

(b) -1

(c) 2

Da

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = (\cdots, \cdots, (2z+1)e^{z^2}) \text{ und } \quad \vec{n} = (0,0,1)$$

sind und der Weg γ auf der xy-Ebene ($z=0$) liegt, ist die Arbeit von $\vec{v}$ entlang γ genau der Flächeninhalt des von γ berandeten Dreieckes D:

$$A = \int_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 1.$$

3. Wie gross ist die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \big(x^2 + z^2, 4y - z, 2xz + 2y\big)$$

entlang des Einheitskreises γ in der (y, z)–Ebene leistet? (Der Durchlaufsinn von γ bilde mit der x–Achse eine Rechtsschraube, schaut man also entlang der positiven Richtung der x-Achse, so wird γ im Uhrzeigersinn durchlaufen.)

(a) π.

√ (b) 3π.

(c) $\frac{\pi}{2}$.

(d) 0.

Sei E die Einheitskreisscheibe in der (y, z)–Ebene, also $\gamma = \partial E$. Wir berechnen

$$\operatorname{rot} \vec{v}\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 2z - 2z \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ auf E, mit dem γ eine Rechtsschraube bildet, ist $(1, 0, 0)$. Nach dem Satz von Stokes ist die gesuchte Arbeit A gegeben durch

$$A = \int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_E \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}O = \iint_E \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}O = 3 \iint_E \mathrm{d}O = 3\pi.$$

Die letzte Gleichung folgt, weil die Fläche von E gleich π ist.
Also ist **b)** die richtige Antwort.

4. Ein Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ erfülle $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$. Was folgt?

(a) Der Fluss $\int_D \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}F$ durch jede Kreisscheibe D in der xy-Ebene verschwindet.

Die Aussage ist falsch. Zum Beispiel, erfüllt $\vec{v}(x, y, z) = (0, 0, 1)$ die Voraussetzung $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$, aber der Fluss durch die Einheitskreisscheibe D, von unten nach oben, ist gleich

$$\int_D \vec{v} \cdot \vec{n} dF = \int_D dF \neq 0.$$

√ (b) Der Fluss $\int_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}F$ durch jede Kugeloberfläche S verschwindet.

Die Aussage ist nach dem Gauss'schen Divergenzsatz wahr. Beachte, dass jede Kugel im Definitionsbereich von $\vec{v}(x, y, z)$ enthalten ist.

5. Sei $\vec{v}(x, y) = (-y, x)$ und C der Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt $(1, 0)$ im Gegenuhrzeigersinn orientiert. Dann gilt $\int_C \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Eine Parametrisierung von C ist

$$t \mapsto (1 + 4\cos t, 4\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Dann

$$\begin{aligned}\int_C \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (-4\sin t, 1 + 4\cos t) \cdot (1 - 4\sin t, 4\cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -4\sin t + 16\sin^2 t + 4\cos t + 16\cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} 4\cos t - 4\sin t + 16 dt = 32\pi \neq 0.\end{aligned}$$

Offene Aufgaben

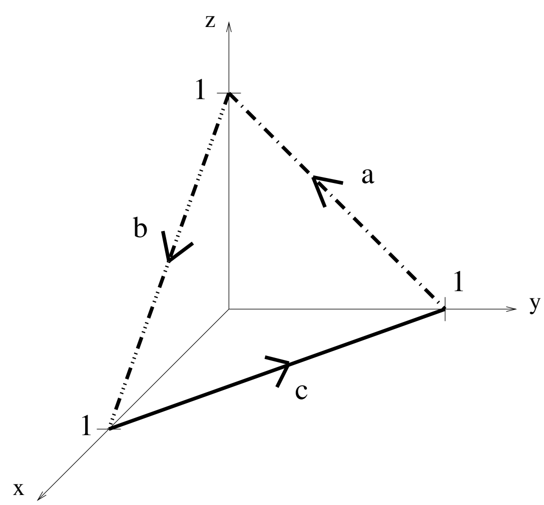
6. Es sei das Vektorfeld $\vec{v}$ durch

$$\vec{v}\colon\ (x,y,z)\mapsto\left(-x^3-2x+z,-y^3-2y+x,-z^3-2z+y\right)$$

und der Weg γ wie in der untenstehenden Figur definiert (er folgt zunächst a, dann b und schliesslich c). Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

(a) direkt;

(b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.



Lösung:

(a) Wir parametrisieren die Kurve a durch

$$a: t\longmapsto(0,1-t,t)\quad\text{mit}\quad 0\le t\le 1.$$

Somit ist $\frac{d}{dt}a\left(t\right)=(0,-1,1)$, und es folgt

$$\begin{aligned}
\int_a \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^1 \vec{v}\left(a\left(t\right)\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a\left(t\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} -0^3-2\cdot 0+t\\ -\left(1-t\right)^3-2\left(1-t\right)+0\\ -t^3-2t+\left(1-t\right)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1\left(-2t^3+3t^2-8t+4\right)\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{2}t^4+t^3-4t^2+4t\right]_0^1\\
&= -\frac{1}{2}+1-4+4=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Die Kurven b und c können analog parametrisiert werden

$$\begin{aligned}
b: &\qquad t\longmapsto(t,0,1-t)\quad\text{mit}\quad 0\le t\le 1\quad\Rightarrow\frac{d}{dt}b\left(t\right)=(1,0,-1)\\
c: &\qquad t\longmapsto(1-t,t,0)\quad\text{mit}\quad 0\le t\le 1\quad\Rightarrow\frac{d}{dt}c\left(t\right)=(-1,1,0)\,.
\end{aligned}$$

Aus den Symmetrien von $\vec{v}$ sieht man, dass

$$\vec{v}\left(a\left(t\right)\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a\left(t\right)=\vec{v}\left(b\left(t\right)\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b\left(t\right)=\vec{v}\left(c\left(t\right)\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c\left(t\right).$$

Damit folgt

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_b \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_c \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 3\cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

(b) Sei F das Dreieck mit den Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$. Es gilt, dass

$$\operatorname{rot}\vec{v}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \frac{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Da das Dreieck gleichseitig ist, ist der Flächeninhalt des Dreiecks ist gleich $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Mit dem Satz von Stokes folgt

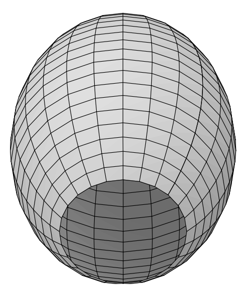
$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_F \operatorname{rot}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}O = \int_F \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\mathrm{d}O\\ &= \frac{3}{\sqrt{3}}\int_F \mathrm{d}O = \frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

7. Ein Heissluftballon habe die Form einer Sphärenkappe (also einer Kugeloberfläche mit horizontalem Schnitt) vom Radius R und Öffnungsdurchmesser $d < 2R$, wie in der untenstehenden Figur. Das heisse Gas dringt durch die poröse Oberfläche B der Kappe mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{F}$, wobei $\vec{F}(x,y,z) = (-y,x,0)$.
Berechnen Sie den Fluss $\iint_B \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A$ durch die Ballonoberfläche B

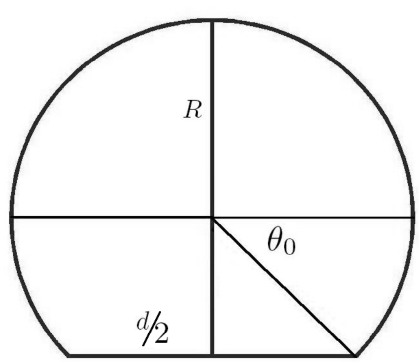
(a) direkt;

(b) mit dem Satz von Gauss;

(c) mit dem Satz von Stokes.



Lösung: B ist Teil der Sphäre mit Radius R um den Ursprung, abgeschnitten in einer Höhe z_0 die durch den Öffnungsdurchmesser d bestimmt wird.



Es ist

$$\vec{F}(x,y,z) \quad = \quad \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} = \operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) **(direkte Rechnung):** B wird parametrisiert durch Kugelkoordinaten

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta \\ R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix}, \;\; \varphi \in [0\,,\,2\pi)\,, \;\; \theta \in \big[0\,,\,\theta_0\big),$$

wobei der Winkel θ_0 dem Winkel der "Abschneidhöhe" entspricht. Dort muss gelten:

$$\begin{aligned}
& x^2 + y^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\
& \Leftrightarrow R^2\cos^2\varphi\sin^2\theta_0 + R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta_0 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\
& \Leftrightarrow \sin^2\theta_0 = \left(\frac{d}{2R}\right)^2 \\
& \Rightarrow \sin\theta_0 = \frac{d}{2R}.
\end{aligned}$$

So ist $\theta_0 = \pi - \arcsin(\frac{d}{2R})$, damit es zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegt (siehe Bild oben). Mit dieser Parametrisierung ist

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -R^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ -R^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ -R^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor ist tatsächlich nach innen orientiert, wir möchten aber den Fluss nach aussen berechnen.
Der Fluss ist also:

$$\begin{aligned}
\int_B \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A \quad &= \quad -\int_0^{\theta_0}\int_0^{2\pi} 2(-R^2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \quad 2\pi R^2 \int_0^{\theta_0} 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \quad 2\pi R^2 \Big[\sin^2\theta\Big]_0^{\theta_0} \\
&= \quad 2\pi R^2 \left(\sin^2(\pi - \arcsin(\frac{d}{2R})) - \sin^2 0\right) \\
&= \quad 2\pi R^2 (\frac{d}{2R})^2 \\
&= \quad \frac{\pi}{2} d^2.
\end{aligned}$$

(b) **(Gauss):** Es gilt

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) = 0.$$

Sei D der kreisförmige "Deckel", der den Ballon verschliesst, und sei G das Innere der durch $B \cup D$ gebildeten geschlossenen Fläche. Der Satz von Gauss besagt:

$$\int_B \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A + \int_D \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = \int_{\partial G} \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = \int_G \operatorname{div}\,\vec{v}\,\mathrm{d}V = 0.$$

Also ist

$$\int_B \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = -\int_D \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A.$$

Berechnung des Flusses durch D: Es ist $\vec{n} = (0,0,1)$ und damit $\vec{v} \cdot \vec{n} = -2$, also

$$\int_D \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = \int_D -2\mathrm{d}A = -2 \cdot \text{Fläche}(D) = -2 \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = -\frac{\pi}{2} d^2.$$

Damit ist

$$\int_B \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = \frac{\pi}{2} d^2.$$

(c) **(Stokes):**
Da $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{F}$ gilt, lässt sich der Fluss auch mit dem Satz von Stokes berechnen.
Sei γ die geschlossene Kurve, die B berandet. Der Satz von Stokes besagt:

$$\int_B \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = \int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Da γ ein Kreis mit Radius $\frac{d}{2}$ und Mittelpunkt $(0,0,z_0)$ ist, parametrisieren wir ihn durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \cos t \\ \frac{d}{2} \sin t \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad t \in [0\,,\,2\pi).$$

Der Weg γ umläuft die Ballonoberfläche im mathematisch positiven Sinn, d. h. wir werden am Ende der Rechnung das richtige Vorzeichen erhalten. Der Fluss berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\int_B \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A &= \int_B \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = \int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \sin t \\ \frac{d}{2} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \sin t \\ \frac{d}{2} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{d^2}{4} \mathrm{d}t = \frac{\pi d^2}{2}.
\end{aligned}$$

8. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ Konstanten mit $a \neq 0$ und $b \neq -2$. Ein zweidimensionales Kraftfeld $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist durch die Gleichung

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} cxy \\ x^6y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Kraft wirkt auf ein Teilchen, das sich entlang der Kurve $y = ax^b$ vom Ursprung bis zum Punkt mit x-Koordinate 1 bewegt.

(a) Berechnen Sie, als Funktion von a, b und c, die Arbeit W, welche durch die Kraft $\vec{f}$ am Teilchen verrichtet wird.

(b) Welche Beziehung muss zwischen a und c gelten, damit die Arbeit W unabhängig von b ist?

(c) Wie gross ist die Arbeit W in diesem Fall? Drücken Sie W in Abhängigkeit von c aus.

Lösung:

(a) Für die Parametrisierung der durch die Gleichung $y = ax^b$ gegebenen Kurve setzen wir x als Parameter und definieren $\vec{r}(t) := \begin{pmatrix} t \\ at^b \end{pmatrix}$ für $t \in [0,1]$. Die am Teilchen verrichtete Arbeit W lässt sich also folgendermassen berechnen:

$$\begin{aligned} W &= \int_{y=ax^b} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\ dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} ctat^b \\ t^6 \cdot (at^b)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ abt^{b-1} \end{pmatrix}\ dt = \int_0^1 act^{b+1} + a^3bt^{3b+5}\ dt \\ &= \frac{ac}{b+2} + \frac{a^3b}{3(b+2)} = \frac{3ac + a^3b}{3(b+2)} \end{aligned}$$

(b) Die Arbeit W ist genau dann von b unabhängig, wenn $\frac{\partial W}{\partial b} = 0$ ist. Die Ableitung lautet

$$\frac{\partial W}{\partial b} = \frac{a(2a^2 - 3c)}{3(b+2)^2}.$$

Sie ist genau dann 0, wenn $2a^2 - 3c = 0$, d.h. wenn $a = \sqrt{3c/2}$.

(c) Einsetzen ergibt $W = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{3c}{2}}$.

9. Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = \big(y^2z, xyz, 2xy^2\big)$.
Vom Nullpunkt des Koordinatensystems aus ist auf einem geradlinigen Weg W die Oberfläche der Einheitskugel zu erreichen. Finden Sie alle Endpunkte des Wegs, so dass die Arbeit entlang W maximal ist.

Lösung: Sei $P = (X, Y, Z)$ ein Punkt auf der Einheitskugel. Es gilt also $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Dann wird der Weg von O nach P wie folgt parametrisiert

$$\vec{r}(t) = t \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Die längs dieses Weges von $\vec{v}$ verrichtete Arbeit $A(P)$ ist dann

$$A(P) = \int_0^1 \vec{v}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3Y^2Z \\ t^3XYZ \\ 2t^3XY^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} dt = XY^2Z \int_0^1 4t^3\, dt = XY^2Z.$$

Es ist also das Maximum von XY^2Z unter der Nebenbedingung $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ gesucht. Man setzt $Y^2 = 1 - X^2 - Z^2$ ein und muss nun das Maximum der Funktion $A(P) = XZ(1 - X^2 - Z^2)$ in der Kreisscheibe $X^2 + Z^2 \leq 1$ suchen. Man beachte, dass auf dem Rand der Kreisscheibe $A(P) = 0$ ist. Für extremale Punkte im Innern verschwindet der Gradient. Man hat also

$$\begin{pmatrix} A_X \\ A_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z(1 - Z^2 - 3X^2) \\ X(1 - X^2 - 3Z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungen dieses Gleichungssystem, für die $X = 0$ oder $Z = 0$ ist, liefern $A = 0$. Für die andern Lösungen gilt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{c} 1 - Z^2 - 3X^2 = 0 \\ 1 - X^2 - 3Z^2 = 0 \end{array} \quad \text{mit der Lösung} \quad X^2 = Z^2 = \frac{1}{4}\,.$$

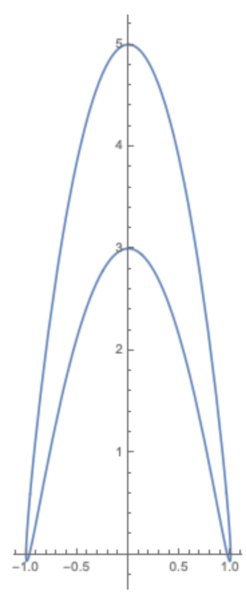
In diesem Fall ist dann $Y^2 = 1 - X^2 - Z^2 = \frac{1}{2}$, und man erhält die vier Punkte

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit maximaler Arbeit} \quad A = \frac{1}{8}\,.$$

10. Die Randkurve ∂B des Bumerangs B (siehe die Zeichnung unten) kann durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ 4\cos^2 t + \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametrisiert werden. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Green den Schwerpunkt von B.



Lösung:

Aus Symmetrie gilt es für die x-Koordinate des Schwerpunktes $x_S = 0$. Die y-Koordinate y_S erfüllt

$$F(B)y_S = \int\int_B y\,dx\,dy,$$

wobei $F(B)$ den Flächeninhalt von B ist.

Der Satz von Green besagt, dass für ein Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \end{pmatrix}$ gilt

$$\int_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int\int_B b_x - a_y dxdy,$$

wobei ∂B im Gegenuhrzeigersinn durchgelaufen wird. Mit $\vec{v}(x,y) = (0,x)$ erhalten wir

$$\int_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int\int_B dxdy = F(B).$$

Mit $\vec{w}(x,y) = (-\frac{y^2}{2}, 0)$ erhalten wir

$$\int_{\partial B} \vec{w} \cdot d\vec{r} = \int\int_B ydxdy.$$

Wir beachten, dass in der Parametriesierung von ∂B aus der Aufgabenstellung wird ∂B in Uhrzeigersinn durchgelaufen. Um den Satz von Green zu anwenden, benutzen wir also die Parametrisierung

$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 4\cos^2 t + \cos t. \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -8\cos t \sin t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Also

$$\begin{aligned} F(B) &= \int_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (0, -\sin t) \cdot (-\cos t, -8\cos t \sin t - \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 8\cos t \sin^2 t + \sin^2 t dt = \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\int_B ydxdy &= \int_{\partial B} \vec{w} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{w}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\frac{(4\cos^2 t + \cos t)^2}{2}, 0) \cdot (-\cos t, -8\cos t \sin t - \sin t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t + \cos t)^2 \cos t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 16\cos^5 t + 8\cos^4 t + \cos^3 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\cos^4 t dt \\ &= 4\frac{3\pi}{4} = 3\pi. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$y_S = \frac{3\pi}{\pi} = 3.$$