D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2021
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 21

MC-Aufgaben

1. Sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld auf $D \subset \mathbb{R}^3$, sodass

$$\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$$

für alle geschlossene Wege W in D. Was folgt?

√ (a) Die Arbeit $\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r}$ hängt nur von Anfangs- und Endpunkt von W ab.

√ (b) $\operatorname{rot} \vec{v} = (0, 0, 0)$

(c) $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

Nein, das hat nichts damit zu tun. (Finde ein Gegenbeispiel!)

(d) $\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$ für alle Wege W.

Nein, das gilt nur für geschlossene Wege.

√ (e) Es existiert eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, sodass $\vec{v} = \operatorname{grad} f$.

Nach Definition ist ein Vektorfeld $\vec{v}$ genau dann konservativ, wenn die Arbeit von $\vec{v}$ nur von Anfangs- und Endpunkt von W abhängig ist. Die Aussage a) ist genau der Satz 1 im Stammbach Buch (Kapitel VI.10, Seite 67). Nach dem Satz 2 (Kapitel VI.10, Seite 69) ist $\vec{v}$ genau dann konservativ, wenn es ein Potentialfeld ist, d.h. die Aussage e) ist richtig. Deswegen ist $\vec{v}$ wirbelfrei (Satz 3 Kapitel VI.10, Seite 70) und die Aussage b) ist auch richtig.

2. Für welche a ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(\ln\left(1 + x^2\right) + ay^2, xy + y^2, z^3\right)$$

von der Form $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ für eine gewisse Funktion $f = f(x, y, z)$ (die man nicht zu bestimmen braucht)?

(a) $a = 0$.

(b) $a = -1/2$.

√ (c) $a = 1/2$.

(d) $a = 1/2$ und $a = -1/2$.

(e) Es gibt kein solches a, da der Definitionsbereich von $\vec{v}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

Wir benutzen den Satz 4 vom Stammbach–Skript, Teil B, Kapitel VI, Seite 71. Der Definitionsbereich von $\vec{v}$ ist der ganze Raum $\mathbb{R}^3$, da $\ln(1 + x^2)$ definiert ist für alle $x \in \mathbb{R}$, und also ist $\mathrm{D}(\vec{v})$ einfach zusammenhängend. Nun gilt

$$\operatorname{rot} \vec{v}\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ y-2ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x, y, z) \in \mathrm{D}(\vec{v})$$

$$\Longleftrightarrow y - 2ay = y(1 - 2a) = 0 \ \text{ für alle } (x, y, z) \in \mathrm{D}(\vec{v}).$$

Daraus folgt, dass $1 - 2a = 0$ oder $a = \frac{1}{2}$. Nach dem oben erwähnten Satz gilt

$$a = \frac{1}{2} \Longrightarrow \text{es gibt ein } f \text{ mit } \ \operatorname{grad} f = \vec{v}.$$

Andererseits gilt nach dem Satz 3 auf Seite 70, dass ein Potentialfeld wirbelfrei sein muss, und $\vec{v}$ ist nur für $a = \frac{1}{2}$ wirbelfrei. Die richtige Antwort ist somit c).

3. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind einfach zusammenhängend?

√ (a) Hohlkugel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

(b) Gefüllter Torus

(c) $\mathbb{R}^3 \setminus x-$Achse

√ (d) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 2, 3)\}$

√ (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geq 1\}$

Ein Bereich D heisst einfach zusammenhängend, wenn sich jeder geschlossene Weg W in D stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

Die Hohlkugel ist einfach zusammenhängend, da man jeden geschlossenen Weg zu einem Punkt zusammenziehen kann, ohne die Hohlkugel dabei zu verlassen. Somit ist (a) richtig. Auf ähnliche Art sieht man, dass das Komplement eines vollen Ellipsoids einfach zusammenhängend ist, womit (e) richtig ist. Der gefüllte Torus ist nicht einfach zusammenhängend, da jeder geschlossene Weg, der um das Loch herumgeht, nicht zu einem Punkt zusammengezogenen werden kann. Somit ist (b) falsch. Der ganze Raum, aus dem man einen Punkt entfernt hat, ist einfach zusammenhängend, da beim Zusammenziehen einer geschlossenen Kurve lässt sich dieser eine Punkt immer vermeiden. Der ganze Raum, aus dem man eine Gerade entfernt hat, ist nicht einfach zusammenhängend, denn eine geschlossene Kurve, die um diese Gerade herumführt, lässt sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen. Deswegen ist die Aussage (c) falsch und (d) richtig.

4. Es seien a, b, c, d, e, f reelle Zahlen. Das Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z) = (ay + bz, cx + dz, ex + fy)$ ist konservativ, falls $a = c, b = d$ und $e = f$ gilt.

(a) Wahr

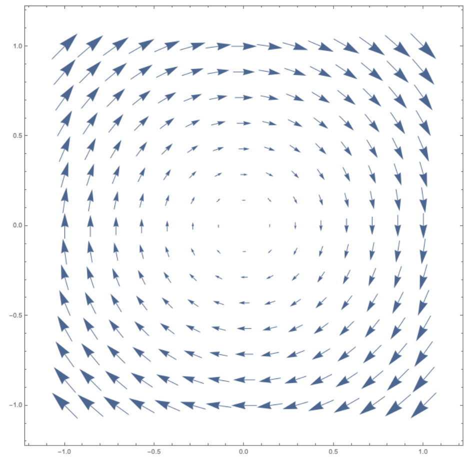
√ (b) Flasch

Seien $a = c, b = d$ und $e = f$. Der Definitionsbereich von $\vec{v}$ ist ganz $\mathbb{R}^3$, also ist einfach zusammenhängend. Daraus folgt, dass

$$\vec{v} \text{ ist konservativ} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{v} = (0, 0, 0).$$

Es gilt $\operatorname{rot} \vec{v} = (e - b, b - e, 0)$, was für $e \neq b$ nicht verschwindet.

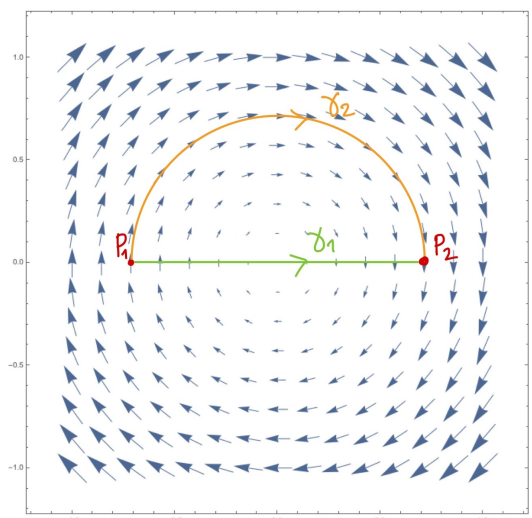
5. Handelt es sich bei der Abbildung um ein konservatives Vektorfeld?



(a) Ja

√ (b) Nein

Ein Vektorfeld $\vec{v}$ heisst konservativ wenn die Arbeit $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$ wegunabhängig ist. Also ist dieses Vektorfeld nicht konservativ. Man betrachtet zum Beispiel die folgende zwei Wege γ_1, γ_2 zwischen P_1 und P_2.



Es gilt $\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$, denn γ_1 steht überall senkrecht zu $\vec{v}$ (also $\forall t$ gilt $\vec{v}(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma_1}(t) = 0$ für alle Parametrisierungen von γ_1).
Anderseits gilt es $\int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{r} > 0$, denn γ_2 ist überall parallel zu $\vec{v}$ (also $\forall t$ gilt $\vec{v}(\gamma_2(t)) \cdot \dot{\gamma_2}(t) > 0$ für alle Parametrisierungen von γ_2).

Offene Aufgaben

6. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \big(2xy + 3, x^2 - 4z, -4y\big) .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ konservativ ist.

(b) Finden Sie eine Funktion f, so dass $\vec{v} = \operatorname{grad} f$.

(c) Berechnen Sie

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

wobei C ein beliebiger Weg ist, der die Punkte $(3, -1, 2)$ und $(2, 1, -1)$ verbindet.

Lösung:

(a) Es ist $D(\vec{v}) = \mathbb{R}^3$, also einfach zusammenhängend und

$$\operatorname{rot} \vec{v}\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} -4 - (-4) \\ 0 - 0 \\ 2x - 2x \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Nach Stammbach–Skript, Teil B, Kapitel VI, Satz 4 (Seite 71) ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld. Nach Satz 2 (Seite 69) ist $\vec{v}$ konservativ.

(b) Nach Teilaufgabe a) existiert f, so dass

$$\vec{v}\,(x, y, z) = \operatorname{grad} f\,(x, y, z) \Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & f_x\,(x, y, z) = 2xy + 3 \\ \text{(ii)} & f_y\,(x, y, z) = x^2 - 4z \\ \text{(iii)} & f_z\,(x, y, z) = -4y. \end{array}$$

Aus (i) folgt, dass $f\,(x, y, z) = x^2y + 3x + C\,(y, z)$, wobei C eine Funktion von y und z ist. Damit ist aus (ii) $x^2 - 4z = f_y\,(x, y, z) = x^2 + C_y\,(y, z)$ oder $C_y\,(y, z) = -4z$, also $C\,(y, z) = -4yz + D(z)$, wobei D eine Funktion von z ist. Somit schreibt sich f als $f\,(x, y, z) = x^2y + 3x - 4yz + D(z)$. Aus (iii) folgt dann $-4y = f_z\,(x, y, z) = -4y + D_z(z)$ oder $D_z(z) = 0$, also $D(z) = K$ mit K eine Konstante in $\mathbb{R}$. Zusammenfassend erhalten wir

$$f\,(x, y, z) = x^2y + 3x - 4yz + K.$$

(c) Da $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist (wegen Teilaufgabe a) oder b)), gilt dass (Stammbach–Skript, Teil B, Kapitel VI, Seite 68)

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = f\,(2, 1, -1) - f\,(3, -1, 2) \overset{\text{b)}}{=} 6.$$

7. Bestimmen Sie das Potential f des Coulombfelds

$$\vec{v}(\vec{r}\,) = -C \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

auf dem Gebiet $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Lösung: Wie wir früher gesehen haben (vgl. Stammbach, Teil B, Kapitel VI.2), ist $\operatorname{rot} \vec{v} = (0, 0, 0)$. Da das Gebiet $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ einfach zusammenhängend ist, existiert also ein Potential f von $\vec{v}$. Für dieses Potential muss insbesondere gelten

$$f_x(x, y, z) = -\frac{Cx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Wenn wir nun die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

betrachten, liegt die Lösung nahe:

$$f(x,y,z)=\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ist ein Potential von $\vec{v}$ (anders geschrieben $f(\vec{r})=\dfrac{C}{|\vec{r}|}$).

8. Wir betrachten das wirbelfreie Vektorfeld (Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters, vgl. Kap. VI, S. 14)

$$\vec{v}:(x,y,z)\longmapsto\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\,\frac{x}{x^2+y^2},\,0\right)$$

aber jetzt nur im Halbraum $x>0$. Dieser Definitionsbereich ist einfach zusammenhängend. Also besitzt $\vec{v}$ darin ein Potential f.

(a) Berechnen Sie f durch Bestimmung der Arbeit von $\vec{v}$ vom Punkt $(1,0,0)$ zum Punkt (x,y,z) längs eines geeigneten Weges.

(b) Verifizieren Sie, dass grad $f=\vec{v}$ ist.

Lösung:

(a) Da $\vec{v}$ ein Potential ist, existiert es eine Funktion g mit $\vec{v}=\operatorname{grad} g$. Es gilt (vgl. Stammbach, Kapitel VI.10)

$$g(x,y,z)-g(1,0,0)=\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{r},$$

für jeden Weg γ von $(1,0,0)$ bis (x,y,z). Wir berechnen $f(x,y,z)=\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{r}$ für einen geeigneten Weg γ. Dann ist

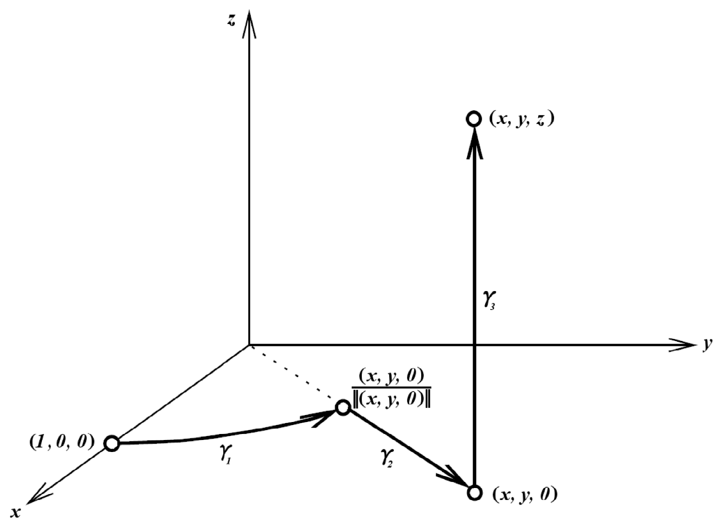
$$\operatorname{grad} f=\operatorname{grad}(g-g(1,0,0))=\operatorname{grad} g=\vec{v},$$

denn $g(1,0,0)$ eine Konstante ist.

Am besten wählt man den in der Figur eingezeichneten Weg $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$. Die Feldlinien sind Kreisbögen parallel zur xy-Ebene mit Zentrum auf der z-Achse (Stammbach, Kapitel VI, Seite 8). Daher ist auf den Wegstücken γ_2 und γ_3 das Vektorfeld senkrecht zur Tangentialrichtung entlang des Weges und die Arbeit gleich Null. Für den Weg γ_1 auf dem Kreisbogen wählt man die übliche Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t)=(\cos t,\,\sin t,\,0)\,,\quad 0\le t\le \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

und erhält für die Arbeit f



$$f(x,y,z) = \int_{\gamma_1} \vec{v}\boldsymbol{\cdot}\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{\arctan(y/x)} \vec{v}\big(\vec{r}(t)\big)\boldsymbol{\cdot}\dot{\vec{r}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\arctan(y/x)} (-\sin t,\, \cos t,\, 0)\boldsymbol{\cdot}(-\sin t,\, \cos t,\, 0)\,\mathrm{d}t$$
$$= \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

(b) $\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \dfrac{-y}{x^2},\, \dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \dfrac{1}{x},\, 0\right) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\, \dfrac{x}{x^2+y^2},\, 0\right) = \vec{v}.$

9. (a) Berechnen Sie das Potential des Kraftfeldes $(x+z^2, yz, \frac{y^2}{2}+2xz)$. Wie gross ist die verrichtete Arbeit, wenn man vom Punkt $(1,0,0)$ nach $(2,1,3)$ geht?

(b) Gegeben sei das Kraftfeld $(x, y, \sqrt{x^2+y^2})$. Berechnen Sie die Arbeit, wenn man sich entlang der spiralförmigen Kurve $(t\cos(t), t\sin(t), t)$ für $0 \le t \le R$ bewegt.

(c) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x,y,z) \longmapsto \left(5005x^{1000}y^3z, 15x^{1001}y^2z + 2y, 5x^{1001}y^3\right).$$

Berechnen Sie die Arbeit A von $\vec{v}$ entlang der Strecke von $P = (1,0,1)$ nach $Q = (0,1,1)$.

Lösung:

(a) Um ein Potential auszurechnen berechnen wir die Arbeit wenn wir uns vom Punkt $P_0(0,0,0)$ zu einem beliebigen anderen Punkt $P(x,y,z)$ durch das Vektorfeld $v = (x + z^2, yz, \frac{y^2}{2} + 2xz)$ bewegen. Dies könnte beispielsweise auf einer Geraden sein:

$$\gamma(t) = (tx, ty, tz).$$

Das Potential berechnet sich dann als Wegintegral

$$\begin{aligned}
\psi(x,y,z) = & \int_\gamma v\,ds = \int_0^1 v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\,dt \\
= & \int_0^1 \begin{pmatrix} tx + t^2z^2 \\ t^2yz \\ t^2y^2/2 + 2t^2xz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt \\
= & \int_0^1 tx^2 + 3t^2xz^2 + \frac{3}{2}t^2y^2z\,dt \\
= & \frac{1}{2}x^2 + xz^2 + \frac{1}{2}y^2z
\end{aligned}$$

Wenn man vom Punkt $(1,0,0)$ nach $(2,1,3)$ geht verrichtet man also die Arbeit

$$A = \psi(2,1,3) - \psi(1,0,0) = 21$$

Bemerkung: Man hätte auch einen anderen Punkt als $P_0(0,0,0)$ als Ausgangspunkt wählen können. Die resultierende Potentialfunktion würde sich dann lediglich um eine Konstante unterscheiden, was bei der Differenzenbildung (s.o.) aber keine Rolle spielt. Auch hätte man einen anderen Weg als eine Gerade nehmen können, was aber ebenfalls keine Rolle spielt, denn falls eine Potentialfunktion existiert, ist die verrichtete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängig (also nicht vom dazwischenliegenden Weg).

(b) Die Arbeit berechnet sich als Wegintegral

$$\begin{aligned}
A = & \int_\gamma v\,ds = \int_0^R v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\,dt \\
= & \int_0^R \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
= & \int_0^R t\cos^2 t + t\sin^2 t + t\,dt \\
= & R^2.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Dieses Vektorfeld hat kein Potential, da $\operatorname{rot} v \neq 0$. Man muss also das Wegintegral ausrechnen.

(c) Der Definitionsbereich von $\vec{v}$ ist der ganze Raum $\mathbb{R}^3$, also einfach zusammenhängend, und

$$\operatorname{rot} \vec{v}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} 15x^{1001}y^2 - 15x^{1001}y^2 \\ 5005x^{1000}y^3 - 5005x^{1000}y^3 \\ 15 \cdot 1001x^{1000}y^2z - 3 \cdot 5005x^{1000}y^2z \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Nach Satz 4 vom Stammbach–Skript, Teil B, Kapitel VI, Seite 71, ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld, d.h es existiert ein Skalarfeld $f = f(x,y,z)$ mit $\operatorname{grad} f = \vec{v}$. Somit ist

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \vec{v}\,(x,y,z) \Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & f_x\,(x,y,z) = 5005x^{1000}y^3z \\ \text{(ii)} & f_y\,(x,y,z) = 15x^{1001}y^2z + 2y \\ \text{(iii)} & f_z\,(x,y,z) = 5x^{1001}y^3. \end{array}$$

Aus (iii) folgt, dass $f\,(x,y,z) = 5x^{1001}y^3z + C(x,y)$, wobei C eine Funktion von x und y ist. Es folgt aus (ii), dass $15x^{1001}y^2z + 2y = f_y\,(x,y,z) = 15x^{1001}y^2z + C_y\,(x,y)$ oder $C_y(x,y) = 2y$, also $C(x,y) = y^2 + D(x)$ mit D eine Funktion von x. f schreibt sich damit als $f\,(x,y,z) = 5x^{1001}y^3z + y^2 + D(x)$. Mit (i) folgt dann, dass $5005x^{1000}y^3z = f_x\,(x,y,z) = 5005x^{1000}y^3z + D_x(x)$ oder $D_x(x) = 0$, also $D(x) = C$, wobei $C \in \mathbb{R}$. Zusammenfassend ist

$$f\,(x,y,z) = 5x^{1001}y^3z + y^2 + C.$$

Damit ist die gesuchte Arbeit A gegeben durch

$$A = f(Q) - f(P) = f(0,1,1) - f(1,0,1) = 1 + C - C = 1.$$