Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 22

MC-Aufgaben

1. Welche Ordnung hat die Differentialgleichung $y'' - x^2y' + y^4 = 0$?

(a) -1

(b) 0

(c) 1

✓ (d) 2

(e) 4

Die *Ordnung* einer Differentialgleichung (in y) ist die höchste Ableitung (von y), die in der Gleichung auftritt.

2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Die Differenzialgleichung $y' = -\frac{y}{x} + 1$

✓ (a) besitzt die Funktion $y : x \to \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ als Lösung;

✓ (b) besitzt die Funktion $y : x \to \frac{x}{2}$ als Lösung;

✓ (c) besitzt unendlich viele Lösungen;

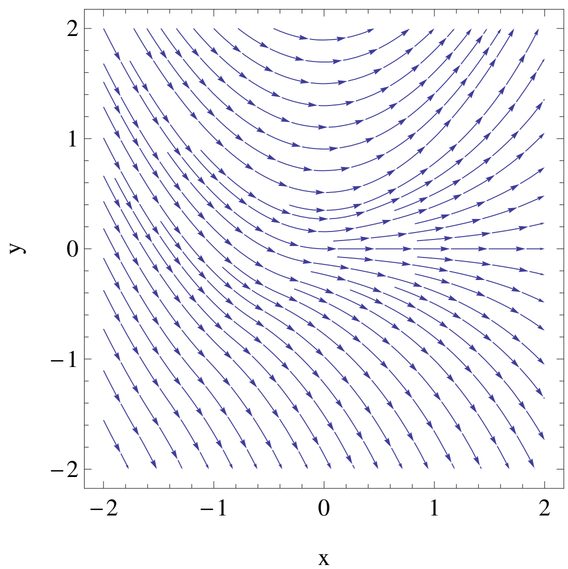
(d) besitzt genau zwei Lösungen.

Durch Einsetzen verifiziert man leicht, dass

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{2} \quad \text{und} \quad y(x) = \frac{x}{2}$$

die Differenzialgleichung lösen. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung besteht aus einem Schar von (unendlich vielen) Lösungskurven. Zu vorgegebenen Anfangsbedingungen würde eine eindeutig bestimmte Lösung (aber nie genau zwei) geben.

3. Welche der folgenden Differentialgleichungen hat das gegebene Richtungsfeld?



(a) $y' = x + y$

(b) $y' = x - y$

√ (c) $y' = \min\{x, y\}$

(d) $y' = \max\{x, y\}$

(e) $y' = |y| - |x|$

Die korrekte Antwort lautet (c). Die anderen kann man auf verschiedene Weisen ausschliessen. Zum Beispiel ist die Richtung entlang der positiven x-Achse und der positiven y-Achse horizontal, also gilt dort $y' = 0$, und das ist nur in (c) der Fall. Oder man stellt fest, dass die Steigung entlang keiner der beiden Diagonalen gleich Null ist, was (a), (b) und (e) ausschliesst. Oder man entdeckt, dass die Richtung oberhalb der Hauptdiagonale nur von y, und unterhalb davon nur von x abhängt, und auch das nur für (c) gilt. Usw.

4. Die Substitution

$$y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

in der Differenzialgleichung

$$x^2 y + 2xy' + y'' = -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

liefert...

(a) $x^2 g + 2xg' + g'' = -2\cos x$

(b) $-x^2 g + 2xg' + g'' = -2\cos x$

√ (c) $g'' - g = -2\cos x$

(d) $g'' - xg' = -2\cos x$

Mit $y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ folgt

$$\begin{aligned} y'(x) &= g'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + g(x)\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(g'(x) - xg(x)\right)e^{-\frac{x^2}{2}} \\ y''(x) &= \left(g''(x) - g(x) - xg'(x)\right)e^{-\frac{x^2}{2}} + \left(g'(x) - xg(x)\right)\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \Big(g''(x) + \big(x^2-1\big)\,g(x) - 2xg'(x)\Big)\,e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

In die Differenzialgleichung $x^2 y + 2xy' + y'' = -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ eingesetzt, erhält man

$$\begin{aligned} x^2 g e^{-\frac{x^2}{2}} + 2x\left(g' - xg\right)e^{-\frac{x^2}{2}} + \Big(g'' + \big(x^2-1\big)\,g - 2xg'\Big)\,e^{-\frac{x^2}{2}} &= -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \Longleftrightarrow g'' - g &= -2\cos x. \end{aligned}$$

5. Betrachten Sie die Tangente an den Graphen der Funktion $x \mapsto y(x)$ im Punkt $(x, y(x))$. Wie lautet die Differenzialgleichung dafür, dass diese Tangente die x-Achse im vorgegebenen Abstand c vom Punkt $(x, 0)$ schneidet?

(a) $x - \frac{y}{y'} = c$

(b) $\frac{y}{y'} = c$

(c) $yy' = c$

√ (d) $\left|\frac{y}{y'}\right| = c$

Die Tangente schneidet die x-Achse in dem Punkt $x - \frac{y}{y'}$. Sein Abstand von dem Punkt x ist der Absolutbetrag der Differenz, also ist (d) korrekt.

Offene Aufgaben

6. Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme (alle diese Differenzialgleichungen sind separierbar):

(a) $\left(x^2+3\right) y' + 2xy = x$,
mit $y(0) = 1$.

(b) $y' = xe^{x+y}$, mit $y(1) = -1$.

(c) $y' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}$, mit $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

(d) $yy' = xy^2 + 2x$, mit $y(-1) = -1$. Existenzintervall?

(e) $y' = \alpha\sqrt{y} - \beta y$, mit $y(0) = 0$.

(f) $\left(x^2+x-6\right) y' = \frac{5}{2y}$, mit $x > 5$ und $\lim_{x\to\infty} y(x) = -1$.

Lösung:

(a) Die Differentialgleichung

$$(x^2+3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = x$$

ist separierbar. Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}y}{1-2y} = \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+3}.$$

Integration liefert

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2y| = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + \frac{1}{2}\ln C.$$

Damit ist

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2c(x^2+3)}$$

die allgemeine Lösung. (Das Vorzeichen haben wir in die Konstante c integriert.) Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ liefert $c = -\frac{1}{3}$. Die gesuchte Lösung ist also

$$y = \frac{3}{2(x^2+3)} + \frac{1}{2}.$$

(b) Die Differenzialgleichung ist separierbar.

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{x} = e^{x+y} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}e^{-y} = xe^x \Longrightarrow \int e^{-y}\mathrm{d}y = \int \underbrace{x}_{\downarrow}\underbrace{e^x}_{\uparrow}\mathrm{d}x \\
&\Longrightarrow \quad \underbrace{-e^{-y}}_{<0} = xe^x - \int e^x\mathrm{d}x = e^x\,(x-1) - c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad -y = \ln\underbrace{(e^x\,(1-x)+c)}_{>0} \\
&\Longleftrightarrow \quad y(x) = \ln\left(\frac{1}{e^x\,(1-x)+c}\right)
\end{aligned}$$

Es gilt weiter

$$y(1) = -1 \Longrightarrow \ln\left(\frac{1}{c}\right) = \ln 1 - \ln c = -1 \Longleftrightarrow c = e.$$

Damit folgt

$$y(x) = \ln\left(\frac{1}{e^x\,(1-x)+e}\right).$$

(c) Die Differenzialgleichung ist separierbar. Somit ist

$$y' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x} \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{\cos^2 y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} \Longrightarrow \tan y = -\cot x + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$, und daraus folgt

$$y(x) = \arctan\left(-\cot x + c\right).$$

Wir setzen nun die Anfangsbedingung $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ ein. Es gilt $\cot\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = 0$ und $\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0$. Also muss $c = 0$ sein, und damit

$$y(x) = \arctan(-\cot x).$$

Bemerkung: Interessanterweise ist $y(x) = x - \frac{\pi}{2}$ im Existenzintervall. Beweise das!

(d) Die Differenzialgleichung

$$y' = yx + 2\frac{x}{y} = x\left(y + \frac{2}{y}\right)$$

ist separierbar. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y + \frac{2}{y}} &= \frac{1}{2}\frac{2yy'}{y^2+2} = x \\ \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\big(\underbrace{y^2+2}_{>0}\big) &= \frac{x^2}{2} + c \\ \Longrightarrow \quad y^2 + 2 = e^{x^2+2c} &= e^{x^2}\cdot e^{2c}, \end{aligned}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$. Nach y aufgelöst ergibt sich

$$y(x) = \pm\sqrt{ke^{x^2} - 2} \quad \text{mit} \quad k = e^{2c}.$$

Für die Anfangsbedingung $y(-1) = -1$ müssen wir die negative Lösung nehmen:

$$-1 = y(-1) = -\sqrt{ke^{(-1)^2} - 2} \quad \Longrightarrow \quad 1 = ke - 2,$$

also $k = \frac{3}{e}$, und $y(x) = -\sqrt{3e^{x^2-1} - 2}$.
Da der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ sein darf, erhalten wir $3e^{x^2-1} \geq 2$, also $x^2 - 1 \geq \ln\frac{2}{3}$, d.h. (für negative x gemäss der Anfangsbedingung)

$$x \leq -\sqrt{1 + \ln\tfrac{2}{3}}.$$

Das Existenzintervall für unsere Lösung ist also $\left(-\infty, -\sqrt{1+\ln\frac{2}{3}}\right]$.

(e) Die Differenzialgleichung ist separierbar.

$$\begin{aligned} y' \quad &= \quad \alpha\sqrt{y} - \beta y \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{\alpha\sqrt{y} - \beta y} = \int \mathrm{d}x \\ \overset{u=\sqrt{y}}{\Longleftrightarrow} \quad &\int \frac{\mathrm{d}y}{\alpha\sqrt{y} - \beta y} = \int \frac{2u\mathrm{d}u}{\alpha u - \beta u^2} = \int \mathrm{d}x \\ \Longleftrightarrow \quad &2\int \frac{\mathrm{d}u}{\alpha - \beta u} = \int \mathrm{d}x \Longleftrightarrow \ln|\alpha - \beta u| = -\frac{\beta x}{2} - \frac{\beta c}{2}, \quad c \in \mathbb{R} \\ \Longleftrightarrow \quad &|\alpha - \beta u| = e^{-\frac{\beta x}{2}} \cdot e^{-\frac{\beta c}{2}} \Longleftrightarrow \alpha - \beta u = Ke^{-\frac{\beta x}{2}} \quad \text{mit} \quad K = \pm e^{-\frac{\beta c}{2}} \\ \Longleftrightarrow \quad &u = -\frac{K}{\beta}e^{-\frac{\beta x}{2}} + \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

Es folgt mit $u = \sqrt{y}$, dass

$$\sqrt{y} = -\frac{K}{\beta} e^{-\frac{\beta x}{2}} + \frac{\alpha}{\beta}. \tag{1}$$

Da die Lösung durch $(0,0)$ gehen soll (setze $(x,y) = (0,0)$ in (1) ein), folgt $K = \alpha$. Damit ist

$$y(x) = \left(-\frac{\alpha}{\beta} e^{-\frac{\beta x}{2}} + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - e^{-\frac{\beta x}{2}}\right)^2.$$

(f) Da $x \neq 2$ und $x \neq -3$, gilt

$$\begin{aligned}\left(x^2 + x - 6\right) y' = \frac{5}{2y} \Longleftrightarrow \left(y^2\right)' &= 2y'y = \frac{5}{x^2 + x - 6} \\ &= \frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}.\end{aligned}$$

Integration liefert dann

$$\begin{aligned} y(x)^2 &= \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= \ln|x-2| - \ln|x+3| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$. Wir bestimmen die Konstante C

$$\begin{aligned} 1 &= (-1)^2 \overset{(*)}{=} \left(\lim_{x\to\infty} y(x)\right)^2 \overset{(**)}{=} \lim_{x\to\infty} y(x)^2 \overset{(2)}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C\right) \\ &\overset{(***)}{=} \lim_{x\to\infty} \ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + \lim_{x\to\infty} C = \lim_{x\to\infty} \ln\left|\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right| + C \\ &\overset{(****)}{=} \ln\left|\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)\right| + C = \ln(1) + C = C, \end{aligned}$$

wobei wir Folgendes benutzt haben
(*) $\lim_{x\to\infty} y(x) = -1$
(**) Stetigkeit der Funktion $x \longmapsto x^2$
(***) Grenzwertregel
(****) Stetigkeit der Logarithmusfunktion und der Betragsfunktion.
Damit ist

$$y(x)^2 = \ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + 1,$$

und aus $\lim_{x\to\infty} y(x) = -1$ (impliziert das Minuszeichen vor der Wurzel) folgt, dass

$$y(x) = -\sqrt{\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + 1}.$$

7. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'x^2 = -xy - x^2 - y^2.$$

Finden Sie die Lösung, die durch die Anfangsbedingung $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ gegeben ist, und bestimmen Sie deren Nullstellen.

Hinweis: Substitution!

Lösung:

Auflösen nach y' führt zu

$$y' = -\frac{y}{x} - 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 .$$

In diesem Fall drängt sich die Substitution $u = \frac{y}{x}$ auf. Aus $y = ux$ folgt $y' = u'x + u$, und eingesetzt

$$u'x + u = -u - 1 - u^2 \quad \text{oder} \quad u'x = -(u+1)^2 .$$

Diese Differentialgleichung ist separierbar:

$$\frac{u'}{(u+1)^2} = -\frac{1}{x} \implies -\frac{1}{u+1} = -\ln|x| - c \quad \text{oder} \quad u + 1 = \frac{1}{\ln|x| + c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

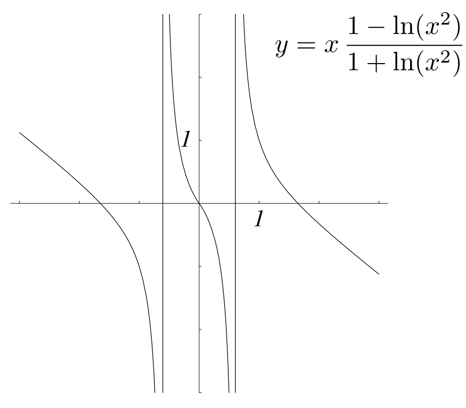
Man macht die Substitution rückgängig und erhält

$$\frac{y}{x} + 1 = \frac{1}{\ln|x| + c} \quad \text{oder} \quad y = x\left(\frac{1}{\ln|x| + c} - 1\right).$$

Aus der Anfangsbedingung $(x_0, y_0) = (1, 1)$ berechnet man der Wert $c = \frac{1}{2}$. Man kann das Resultat noch umformen zu

$$y = x\,\frac{1 - 2\ln|x|}{1 + 2\ln|x|} = x\,\frac{1 - \ln(x^2)}{1 + \ln(x^2)} .$$

Die Nullstellen sind $x = 0$ und $x = \pm e^{1/2}$.



Aufgrund der auftretenden Pole kann man auch sagen, die Lösung sei nur für $x > e^{-1/2}$ definiert (da nach der Anfangsbedingung $x = 1$ im Definitionsbereich liegen muss). Dann ist $x = e^{1/2}$ die einzige Nullstelle.

8. Finden Sie die Lösung $t \mapsto x(t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\dot{x}^2 + 1$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$, und diskutieren Sie das Verhalten der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ für $t \to \infty$.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst $v(t) = \dot{x}(t)$.

Lösung:

Sei $v(t) = \dot{x}(t)$, dann lässt sich die DGL schreiben als

$$\dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v^2 + 1 \implies \int \frac{\mathrm{d}v}{1 - v^2} = \int \mathrm{d}t.$$

Durch Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{v-1}{v+1} \right| &= t + C_1 \\ \ln \left| \frac{v+1}{v-1} \right| &= 2t + 2C_1 \\ \frac{v+1}{v-1} &= Ke^{2t} \qquad \text{wobei } K = \pm e^{2C_1} \\ v\left(1 - Ke^{2t}\right) &= -1 - Ke^{2t}. \end{aligned}$$

$$\implies \dot{x}(t) = v(t) = \frac{Ke^{2t} + 1}{Ke^{2t} - 1}$$

Aus $\dot{x}(0) = 0 = \frac{K+1}{K-1}$ folgt $K = -1$.

$$\lim_{x \to \infty} \dot{x}(t) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} = \lim_{x \to \infty} 1 - \frac{2}{e^{2t} + 1} = 1$$

Für $x \to \infty$ konvergiert somit die Geschwindigkeit gegen 1.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \dot{x} \mathrm{d}t = \int \frac{e^{2t} + 1 - 2}{e^{2t} + 1} \mathrm{d}t = \int 1 - \frac{2}{e^{2t} + 1} \mathrm{d}t = \\ &= t - \int \frac{2}{e^{2t}(1 + e^{-2t})} \mathrm{d}t = t + \int \frac{-2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} \mathrm{d}t = t + \ln\left(1 + e^{-2t}\right) + C_2 \end{aligned}$$

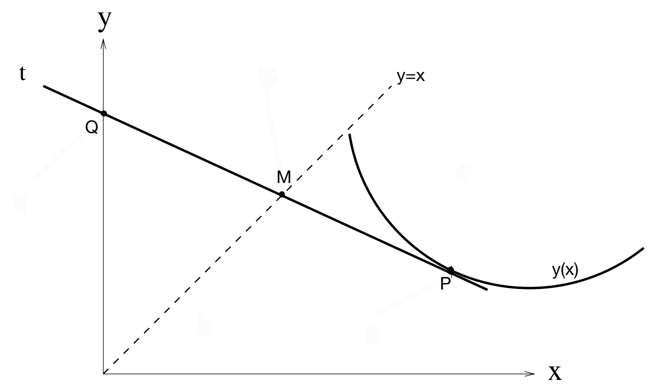
Aus $x(0) = 0 = \ln(2) + C_2$ folgt $C_2 = -\ln(2)$ und damit ist die Lösung der DGL

$$x(t) = t + \ln\left(\frac{1 + e^{-2t}}{2}\right).$$

9. Finden Sie alle Kurven, gegeben durch $y = y(x)$, welche die folgende Bedingung erfüllen: Es sei t die Tangente im Punkt P der Kurve und Q ihr Schnittpunkt mit der y–Achse. Dann liegt der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ auf der Geraden, gegeben durch $y = x$.

Lösung:

Sei $P = (x, y(x)) \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt auf der Kurve K, gegeben durch $y = y(x)$ und $Q = (0, q) \in \mathbb{R}^2$.



Die Tangente t in P an die Kurve K ist gegeben durch

$$t : z \longmapsto y'(x)(z - x) + y(x).$$

Die Tangente t und soll durch $Q = (0, q)$ gehen. Also gilt

$$q = t(0) = y'(x)(0 - x) + y(x) \quad \text{, also } \; q = -y'(x)\,x + y(x). \tag{3}$$

Andererseits ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= (x_M, y_M) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{2}\left[(x, y(x)) + (0, q)\right] = \frac{1}{2}(x, y(x) + q) \\ &\overset{(3)}{=} \frac{1}{2}(x, y(x) - y'(x)\,x + y(x)) = \left(\frac{1}{2}x, y(x) - \frac{1}{2}y'(x)x\right),\end{aligned}$$

wobei $O = (0, 0)$ ist. Da der Mittelpunkt (x_M, y_M) auf der Geraden, gegeben durch $y = x$, liegt, muss gelten $x_M = y_M$, also

$$\frac{1}{2}x = y(x) - \frac{1}{2}y'(x)x \Longleftrightarrow y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = -1 \;\; (x \neq 0),$$

d.h $y : x \longmapsto y(x)$ ist Lösung der folgenden inhomogenen linearen Differenzialgleichung erster Ordnung

$$y' - \frac{2}{x}y = -1.$$

Wir suchen eine allgemeine Lösung y_h der zugehörigen (separierbaren) homogenen Differenzialgleichung:

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \Longrightarrow \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \Longrightarrow \ln|y| = 2(\ln|x| + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow y_h(x) = Kx^2,\; K \in \mathbb{R}$$

Für die partikuläre Lösung y_p der Differenzialgleichung $y' - \frac{2}{x}y = -1$ machen wir folgenden Ansatz:

$$y_p\,(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Damit ist $y_p'(x) = a$. Eingesetzt in die Differenzialgleichung $y' - \frac{2}{x}y = -1$ oder $y'x - 2y = -x$ liefert

$$(-1) \cdot x = ax - 2(ax + b) = ax - 2ax - 2b = -ax - 2b.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $-a = -1$ und $-2b = 0$, also $a = 1$ und $b = 0$. Damit ist $y_p(x) = x$. Die allgemeine Lösung von $y' - \frac{2}{x}y = -1$ ist somit

$$y(x) = y_h\,(x) + y_p\,(x) = Kx^2 + x,\ K \in \mathbb{R}.$$

Dies ist die Gleichung der Kurven, die unsere Bedingungen erfüllen.