D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2021
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 23

MC-Aufgaben

1. Gegeben ist eine lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung, welche $y : x \mapsto \sin x$ als Lösung besitzt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $x \mapsto \cos x$ ist ebenfalls eine Lösung.

(b) $x \mapsto \sin(2x)$ ist ebenfalls eine Lösung.

√ (c) $x \mapsto 2\sin(x)$ ist ebenfalls eine Lösung.

(d) $x \mapsto \sin(x) + 2x$ ist ebenfalls eine Lösung.

Von den angegebenen Varianten lässt sich nur $2\sin(x)$ als Linearkombination von der gegebenen Lösung schreiben.

2. Welche der folgenden Aussagen stimmen?

(a) Jede separierbare Differentialgleichung ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

(b) Jede lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

√ (c) Jede homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

Eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung hat die Form $y' = p(x)y$ und ist damit separierbar. Für alle anderen Aussagen lassen sich Gegenbeispiele finden. Richtig ist also (c).

3. Die Differentialgleichung

$$y' = x^2 + 2xy + y^2$$

(a) ist linear.

(b) ist separierbar.

(c) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

√ (d) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

Richtig ist d). Mit $u = x + y$ folgt $y' = u' - 1 = (x + y)^2 = u^2$, die Substitution führt also auf die Differentialgleichung $u' = u^2 + 1$ mit getrennten Variablen.

4. Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{x^2} y + \sin x$$

√ (a) ist linear.

(b) ist separierbar.

(c) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

(d) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

Richtig ist a). Die Differentialgleichung ist der Form $y' = p(x)y + q(x)$.

5. Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} + \sin \frac{y}{x}$$

(a) ist linear.

(b) ist separierbar.

√ (c) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

(d) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

Richtig ist c). Sei $u = \frac{y}{x}$, dann gelten $y = ux$ und $y' = u'x + u$. Setzen wir dies in die gegebene Differentialgleichung ein, erhalten wir

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 u}{x^2 - u^2 x^2} + \sin(u) = \frac{u}{1 - u^2} + \sin(u).$$

Also ist $y' = u'x + u = \frac{u}{1-u^2} + \sin u$. Lösen wir dies nach u' auf, erhalten wir die Gleichung

$$u' = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 - u^2} + \sin u - u\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{u^3}{1 - u^2} + \sin u\right)$$

mit getrennten Variablen.

6. Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei das Potential eines Vektorfelds $\vec{v} = \operatorname{grad} g$. In welcher Beziehung stehen die Niveaulinien von g mit den Feldlinien von $\vec{v}$?

(a) Die Niveaulinien von g und die Feldlinien von $\vec{v}$ sind (abgesehen von der Orientierung) gleich.

√ (b) Die Niveaulinen von g und die Feldlinien von $\vec{v}$ sind Orthogonaltrajektorien voneinander.

(c) Es gibt keinen Zusammenhang dieser Art.

Nach Definition stehen die Feldlinien von $\vec{v}$ tangential zu $\vec{v}$ in jedem Punkt. Anderseits steht $\vec{v} = \operatorname{grad} g$ in jedem Punkt senkrecht zu den Niveaulinien von g. Also verlaufen die Feldlinien von $\operatorname{grad} g$ senkrecht zu den Niveaulinien von g und (b) ist die korrekte Antwort.

Offene Aufgaben

7. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

(a)
$$\begin{cases} y' - 3y = e^{2x}, & x \in (-\infty, \infty) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} xy' - 2y = x^5, & x \in (0, \infty) \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} y' + y \tan x = \sin 2x, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 4xy = (1+x^2)^{-2}, & x \in (-\infty, \infty) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Lösung:

(a) Die homogene Gleichung $y' - 3y = 0$ ist separierbar und hat allgemeine Lösung $y_h = Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$. Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $y_p = \alpha e^{2x}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, welches wir durch Einsetzen in die DGL bestimmen:

$$y_p' - 3y_p = 2\alpha e^{2x} - 3\alpha e^{2x} = -\alpha e^{2x} = e^{2x}.$$

Nach Vergleichen der Koeffizienten folgt, dass $\alpha = -1$ ist. Somit ist $y_p = -e^{2x}$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y = Ce^{3x} - e^{2x}.$$

Aus der Anfangsbedingung ergibt sich:

$$y(0) = C - 1 = 0 \Longrightarrow C = 1.$$

Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblemes ist also

$$y = e^{3x} - e^{2x}.$$

(b) Die homogene Gleichung $xy' - 2y = 0$ ist separierbar und hat allgemeine Lösung $y_h = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$. Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den polynomiellen Ansatz

$$y_p = \alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \epsilon x + \zeta.$$

Wir setzen y_p in die Gleichung ein, um die Koeffizienten zu bestimmen:

$$xy_p' - 2y_p = 3\alpha x^5 + 2\beta x^4 + \gamma x^3 - \epsilon x - 2\zeta = x^5.$$

Nach Vergleichen der Koeffizienten folgt, dass $\alpha = 1/3$, $\beta = \gamma = \epsilon = \zeta = 0$ sind und δ beliebig gewählt werden kann. Da wir nur eine partikuläre Lösung suchen, wählen wir $\delta = 0$ und somit ist $y_p = \frac{1}{3}x^5$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y = Cx^2 + \frac{x^5}{3}.$$

Aus der Anfangsbedingung ergibt sich:

$$y(0) = C + \frac{1}{3} = 1 \Longrightarrow C = \frac{2}{3}.$$

Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblemes ist also

$$y = \frac{2x^2 + x^5}{3}.$$

(c) Wir lösen die homogene Gleichung $y' + y\ \tan x = 0$:

$$y_h' + y_h\ \tan x = 0 \Longleftrightarrow \frac{y_h'}{y_h} = -\tan x \Longrightarrow \log|y_h| = \log|\cos x| + K_1$$
$$\Longrightarrow y_h = K_2\ \cos x.$$

Hierbei sind K_1 und K_2 Konstanten. Für die inhomogene Gleichung $y'+y\ \tan x = \sin 2x$ machen den Lagrange-Ansatz $y = \gamma(x)\cos x$, wobei γ eine Funktion von x ist:

$$\begin{aligned} y' + y\ \tan x &= \gamma'(x)\cos x - \gamma(x)\sin x + \gamma(x)\cos x \tan x = \gamma'(x)\cos x \\ &= \sin 2x = 2\sin x \cos x. \end{aligned}$$

Dann ist $\gamma'(x) = 2\sin x$ und somit $\gamma(x) = -2\cos x + K$ für eine Konstante K. Wir haben also die allgemeine Lösung

$$y = (-2\cos x + K)\cos x = K\cos x - 2\cos^2 x.$$

Aus der Anfangsbedingung ergibt sich:

$$y(0) = K - 2 = 2 \Longrightarrow K = 4.$$

Dann ist die gesuchte Lösung $y = 4\cos x - 2\cos^2 x$.

(d) Wir lösen die homogene Gleichung $(1+x^2)y' + 4xy = 0$:

$$(1+x^2)y_h' + 4xy_h = 0 \Longleftrightarrow \frac{y_h'}{y_h} = -\frac{4x}{1+x^2} \Longrightarrow \log|y_h| = -2\log(1+x^2) + K_1$$
$$\Longrightarrow y_h = \frac{K_2}{(1+x^2)^2},$$

wobei K_1 und K_2 Konstanten sind. Für die inhomogene Gleichung $(1+x^2)y' + 4xy = (1+x^2)^{-2}$ machen den Lagrange-Ansatz $y = \frac{\gamma(x)}{(1+x^2)^2}$, wobei γ eine Funktion von x ist:

$$\begin{aligned} (1+x^2)y' + 4xy &= (1+x^2)\cdot\frac{\gamma'(x)(1+x^2)^2 - 4x(1+x^2)\cdot\gamma(x)}{(1+x^2)^4} + \frac{4x\gamma(x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{\gamma'(x)}{1+x^2} = (1+x^2)^{-2} \end{aligned}$$

Dann ist $\gamma'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und somit $\gamma(x) = \arctan x + K$ für eine Konstante K. Wir haben also die allgemeine Lösung

$$y = \frac{\arctan x + K}{(1+x^2)^2}.$$

Aus der Anfangsbedingung ergibt sich:

$$y(0) = K = 0 \Longrightarrow K = 0.$$

Dann ist die gesuchte Lösung

$$y = \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}.$$

8. Lösen Sie Differentialgleichung

$$1 - x^2 + y^2 = 2xyy'$$

mit Hilfe der Substitution $u(x) = (y(x))^2$.

Lösung: Mit $u(x) = y(x)^2$ erhält man $u'(x) = 2y(x)\,y'(x)$. Eingesetzt in die Differenzialgleichung ergibt dies

$$1 - x^2 + u = xu' \;\text{ oder }\; u' - \frac{1}{x}u = \frac{1-x^2}{x}.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung. Wir suchen die allgemeine Lösung u_h der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung $u' - \frac{1}{x}u = 0$ (sie ist separierbar). Es gilt

$$u' - \frac{1}{x}u = 0 \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Longrightarrow \ln|u| = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$u_h(x) = Kx, \quad K = \pm e^C.$$

Nun suchen wir eine partikuläre Lösung u_p der Differenzialgleichung $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1-x^2}{x}$: Wir benutzen die Methode von Lagrange (Variation der Konstanten), wähle

$$u_p(x) = \gamma(x) \cdot u_h(x) = \gamma(x) \cdot Kx.$$

Eingesetzt in $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1-x^2}{x}$ liefert

$$\gamma'(x) = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{u_h(x)} = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{Kx} = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \Longrightarrow \gamma(x) = \frac{1}{K}\left(-\frac{1}{x} - x\right).$$

(Auf die Integrationskonstante kann verzichtet werden, da wir nur eine partikuläre Lösung suchen). Also ist

$$u_p(x) = \gamma(x) \cdot Kx = \frac{1}{K}\left(-\frac{1}{x} - x\right) \cdot Kx = -1 - x^2.$$

Damit ist die allgemeine Lösung von $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1-x^2}{x}$

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = Kx - 1 - x^2,$$

und somit ist die allgemeine Lösung von $1 - x^2 + y^2 = 2xyy'$ gegeben durch

$$y(x)^2 = u(x) = Kx - 1 - x^2.$$

Zu Übungszwecken skizzieren wir die Lösung (auch wenn das in der Übung nicht gefragt ist). Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$\begin{aligned} y^2 = Kx - 1 - x^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad y^2 - Kx + x^2 = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad y^2 + \underbrace{x^2 - Kx + \left(\frac{K}{2}\right)^2}_{\left(x - \frac{K}{2}\right)^2} - \left(\frac{K}{2}\right)^2 = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x - \frac{K}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{K^2}{4} - 1. \qquad (1) \end{aligned}$$

Aus (1) folgt, dass die Lösungskurven (im Fall $\frac{K^2}{4} - 1 > 0$ oder $K^2 > 4$ oder $|K| > 2$) Kreise mit Mittelpunkt $\left(\frac{K}{2}, 0\right)$ und Radius $\sqrt{\frac{K^2}{4} - 1}$ sind.

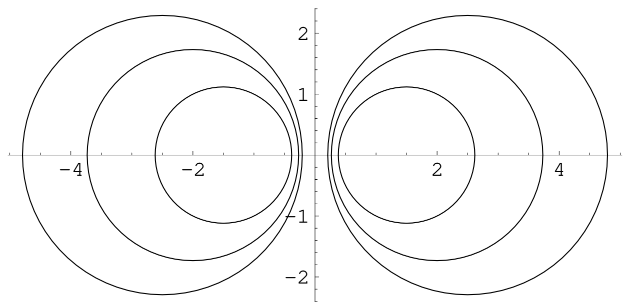
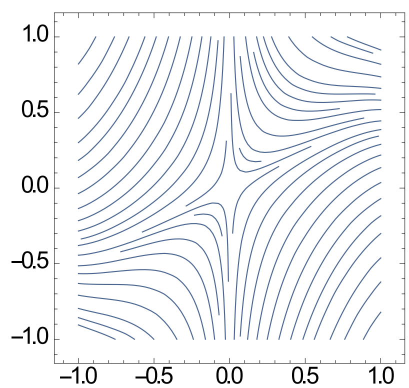


Abbildung 1: Lösungskurven für $K = -5, -4, -3, 3, 4, 5$

9. Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{x} + \cos\left(x^2\right).$$

Die Lösungskurven sehen Sie unten.



Lösung:

$y' = -\frac{y}{x} + \cos\left(x^2\right)$ ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung (Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 36 – 40). Wir suchen eine allgemeine Lösung y_h der zugehörigen (separierbaren) homogenen Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned} y' = -\frac{y}{x} \quad &\Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y} \mathrm{d}y = -\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x \Longrightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C \quad , C \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow \quad y_h(x) = K \cdot \frac{1}{x} \quad , K := \pm e^C. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass natürlich auch $K = 0$ eine Lösung der homogenen Gleichung gibt, dh. im Allgemeinen haben wir $K \in \mathbb{R}$.

Nun brauchen wir noch eine partikuläre Lösung y_p der Differenzialgleichung $y' = -\frac{y}{x} + \cos\left(x^2\right)$. Dazu wenden wir die Methode von Lagrange an (Variation der Konstanten, Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 41):
Wir setzen

$$y_p(x) = \gamma(x) \cdot y_h(x) = \gamma(x) \cdot K\frac{1}{x},$$

wobei γ eine Funktion ist, die wir noch zu bestimmen haben. (Es würde genügen, eine beliebige nichttriviale Lösung $\tilde{y}_h$ der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung zu nehmen und $y_p(x) = \gamma(x) \cdot \tilde{y}_h(x)$ zu setzen. Hier könnte man zum Beispiel $K = 1$ setzen, also $\tilde{y}_h(x) = \frac{1}{x}$.) Den Ansatz eingesetzt in $y' = -\frac{y}{x} + \cos\left(x^2\right)$, liefert nach Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 41 und 42,

$$\gamma'(x) = \frac{\cos\left(x^2\right)}{y_h(x)} = \frac{\cos\left(x^2\right)}{K\frac{1}{x}} = \frac{2x\cos\left(x^2\right)}{2K} \tag{2}$$

$\big(q(x) := \cos\left(x^2\right)$ ist das Störglied oder inhomogene Glied (siehe Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 36)$\big)$. Es folgt

$$\gamma(x) = \frac{\sin\left(x^2\right)}{2K} \tag{3}$$

(die Integrationskonstante kann null gesetzt werden, da wir nur eine partikuläre Lösung brauchen). Damit ist

$$y_p(x) = \frac{\sin\left(x^2\right)}{2K} \cdot K\frac{1}{x} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{2x}.$$

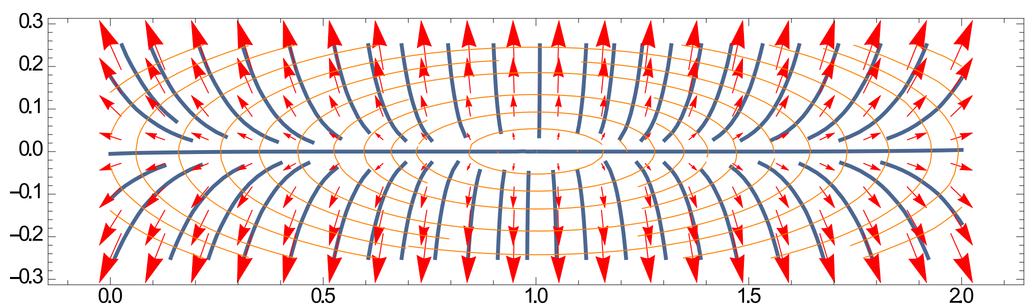
Die allgemeine Lösung von $y' = -\frac{y}{x} + \cos\left(x^2\right)$ ist somit (Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 40)

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = K\frac{1}{x} + \frac{\sin\left(x^2\right)}{2x}.$$

10. (a) Bestimmen Sie ein ebenes Vektorfeld $\vec{v}$, welches in jedem Punkt in $\mathbb{R}^2$ eine Ellipse der durch $c > 0$ parametrisierten Schar

$$(x-1)^2 + 9y^2 = c$$

senkrecht schneidet.



(b) Bestimmen Sie die Feldlinien des in (a) gefundenen Vektorfeldes $\vec{v}$.

Lösung:

(a) Es sei $f(x, y) := (x-1)^2 + 9y^2$; dann ist $\vec{v} = \textbf{grad}\ f$ ein Vektorfeld der verlangten Art, also

$$\vec{v} = (2(x-1),\, 18y)\,.$$

(b) Die Feldlinien des in (a) gefundenen Vektorfeldes genügen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{9y}{x-1}.$$

Diese Gleichung ist separierbar. Die Integration

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{9y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$$

ergibt $y = C \cdot (x-1)^9$, für eine reelle Konstante C.

11. Wir betrachten eine Differentialgleichung der Form

$$y' + cy = g(x),$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $g(x)$ ist eine Linearkombination von Produkten von Polynom-, Exponential-Kosinus- und Sinusfunktionen.
Eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung kann mit Hilfe eines Ansatzes auf der folgenden Tabelle gefunden werden.

Enthält $g(x)$ einen Term der Form...	und ist...	so fügen wir die folgende y_P als Lösungsansatz ein:
$P_n(x)$	$c \neq 0$	$y_P = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$
	$c = 0$	$y_P = x(A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n)$
$e^{\alpha x}$	$c \neq -\alpha$	$y_P = Ae^{\alpha x}$
	$c = -\alpha$	$y_P = Axe^{\alpha x}$
$k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)$	$\beta \neq 0$	$y_P = A_1 \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$c \neq -\alpha$	$y_P = (A_0 + \ldots + A_n x^n)e^{\alpha x}$
	$c = -\alpha$	$y_P = x(A_0 + \ldots + A_n x^n)e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ $+Q_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$\beta \neq 0$	$y_P = (A_0 + \ldots + A_n x^n)e^{\alpha x}\cos(\beta x) +$ $+(B_0 + \ldots + B_n x^n)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

In der Tabelle bezeichnen $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ Polynomfunktionen n-ten Grades.

Ziel dieser Aufgabe ist die folgende Differentialgleichung

$$y' - 2y = e^x + e^{2x} - e^{2x}\sin(3x),$$

zu lösen.

(a) Lösen Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung.

(b) Benutzten Sie die obige Tabelle um eine partikuläre Lösung zu bestimmen.
Hinweis: Für jeden Term der Störfunktion (nämlich e^x , e^{2x} und $e^{2x}\sin(3x)$) nehmen Sie einen Ansatzteil und bezeichnen die zu bestimmenden Koeffizienten mit verschiedenen Buchstaben. Setzen Sie den ganzen Ansatz in die DGL ein und bestimmen die Koeffizienten mittels eines Koeffizientenvergleichs.

(c) Benutzen Sie das Superpositionsprinz, um die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu bestimmen.

Lösung:

(a) Die homogene Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y' = 2y.$$

Sie ist separierbar und durch Integration erhalten wir für $y \neq 0$

$$\frac{1}{2}\ln|y| = x + C,$$

mit einer Kontanstanten $C \in \mathbb{R}$, also $|y(x)| = e^{2x+2C}$, oder $y(x) = \pm C_1 e^{2x}$, wobei $C_1 = e^{2C}$ eine beliebige positive Konstante ist. Der Fall $y = 0$ liefert auch die konstante Nulllösung. Insgesamt ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$y_h(x) = Ke^{2x},$$

wobei $K \in \mathbb{R}$.

(b) Der Ansatz für e^x is Ae^x, der Ansatz für e^{2x} ist Bxe^{2x} und der Ansatz für $-e^{2x}\sin(3x)$ ist $Ce^{2x}\cos(3x) + De^{2x}\sin(3x)$. Also ist der ganze Ansatz für $y_p(x)$ gegeben durch

$$y_p(x) = Ae^x + Bxe^{2x} + Ce^{2x}\cos(3x) + De^{2x}\sin(3x).$$

Leiten wir dies nach x ab, so erhalten wir

$$y_p'(x) = Ae^x + B(1+2x)e^{2x} + (2C\cos(3x) - 3C\sin(3x) + 2D\sin(3x) + 3D\cos(3x))\,e^{2x}.$$

Wir setzen dies in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned}&Ae^x + B(1+2x)e^{2x} + (2C\cos(3x) - 3C\sin(3x) + 2D\sin(3x) + 3D\cos(3x))\,e^{2x}\\ &\quad - 2Ae^x - 2Bxe^{2x} - 2Ce^{2x}\cos(3x) - 2De^{2x}\sin(3x)\\ &\quad = e^x + e^{2x} - e^{2x}\sin(3x).\end{aligned}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich erhalten wir folgende Gleichungen für die Koeffizienten A, B, C und D:

$$-A = -1,\ B = 1,\ 3D = 0,\ -3C = -1.$$

Das heisst, $A = -1$, $B = 1$, $C = \frac{1}{3}$ und $D = 0$. Wir erhalten also

$$y_p(x) = -e^x + xe^{2x} + \frac{1}{3}e^{2x}\cos(3x).$$

(c) Es gilt $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ke^{2x} - e^x + xe^{2x} + \frac{1}{3}e^{2x}\cos(3x)$.