D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2021
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 24

Am Ende des Übungsblattes finden sich die numerischen Lösungen der offenen Aufgaben, so dass Sie Ihre Lösungen rechtzeitig kontrollieren können.

MC-Aufgaben

1. Gegeben seien Funktionen s, $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Welche aus den folgenden Bedingungen garantieren die Exaktheit der Differenzialgleichung $s(x, y) = t(x, y) \cdot y'$?

(a) Für alle (x, y): $s_y(x, y) = t_x(x, y)$.

(b) Für alle (x, y): $s_x(x, y) = t_y(x, y)$.

√ (c) Für alle (x, y): $s_y(x, y) = -t_x(x, y)$.

(d) Für alle (x, y): $s_x(x, y) = -\frac{1}{t_y(x,y)}$.

(e) Keine.

Weil s und t einen einfach zusammenhängenden Definitionsbereich haben (nämlich das ganze $\mathbb{R}^2$), ist $s(x, y) - t(x, y) \cdot y' = 0$ genau dann exakt, wenn $s_y(x, y) = -t_x(x, y)$ (vgl. Stammbach, Analysis, Kap. VII.6).

2. Welche aus den folgenden Gleichungen sind exakt?

(a) $e^x \sin y + 3y - (3x - e^x \sin y)y' = 0$.

√ (b) $\left(\frac{y}{x} + 6x\right) + (\log x - 2)y' = 0$, $x > 0$.

(c) $(y \log x + xy)y' = -x \log y - xy$.

(d) $y' = -\frac{ax+by}{bx+cy}$, $a, b, c, d > 0$ Konstante.

Eine Differentialgleichung ist exakt, wenn sie der Form $\phi(x, y) + \psi(x, y)y' = 0$ ist, wobei $\phi_y = \psi_x$. Die Differentialgleichung in (b) ist in dieser Form, (a), (c) und (d) hingegen nicht. Wir beachten, dass wenn man (d) mal $bx + cy$ multipliziert, dann ist die Differentialgleichung

$$ax + by + (bx + cy)y' = 0 \tag{1}$$

exakt und eine Lösungsfunktion y von (1) löst auch die ursprüngliche Gleichung aus (d).

3. Welche Aussagen über die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$x^2 + Cy^2 = 1$$

mit Scharparameter C sind korrekt?

√ (a) Die y–Achse ist eine Orthogonaltrajektorie.

√ (b) Alle Orthogonaltrajektorien, welche den Punkt $(0, 0)$ nicht treffen, sind geschlossene Kurven.

(c) Die Kurven der Form $y^2 + x^2 - \ln|x| = K$ mit $K \geq 1$ sind Orthogonaltrajektorien.

√ (d) Die Kurven der Form $y^2 + x^2 - \ln(x^2) = K$ mit $K \geq 1$ sind Orthogonaltrajektorien.

Die Differenzialgleichung der Kurvenschar $x^2 + C\,y^2 = 1$ erhält man durch Elimination des Scharparameters C. Durch totale Ableitung nach x erhält man $2\,x + C\,2\,yy' = 0$. $C = \frac{1-x^2}{y^2}$ $(y \neq 0)$ eingesetzt liefert

$$2x + \frac{1-x^2}{y^2} 2yy' = 0. \tag{2}$$

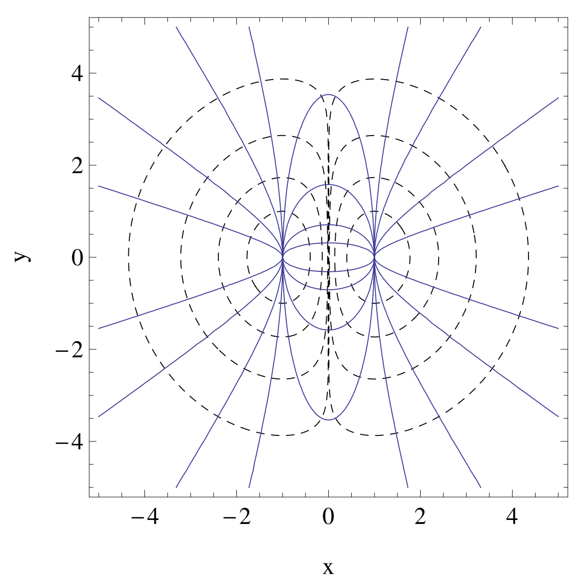
Falls $x = 0$, dann ist $y' = 0$ für alle y. D.h. die y–Achse ist eine Orthogonaltrajektorie, und somit ist (a) richtig. Die Differenzialgleichung der Orthogonaltrajektorien finden wir, indem wir in (2) die Ableitung y' durch $-1/y'$ ersetzen (siehe Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 52), also

$$yy' = \frac{1-x^2}{x}, \quad x \neq 0.$$

Integrieren liefert

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + \frac{K}{2} \quad \text{oder} \quad y^2 + \underbrace{x^2 - \ln(x^2)}_{\geq 1} = K$$

mit $K \geq 1$. Da dies für alle $x \neq 0$ gilt, folgt, dass (d) richtig ist und (c) falsch ist. Diese Orthogonaletrajektorien sind sowohl bezüglich der x–Achse als auch bezüglich der y–Achse symmetrisch. Sie befinden sich für ein gegebenes K in einem beschränkten Bereich auf der xy–Ebene, wie man in der folgenden Abbildung sehen kann.



Die blauen Linien sind die Kurven der gegebenen Kurvenschar und die gestrichelten Linien sind deren Orthogonaltrajektorien. Diese Kurven sind geschlossen und damit ist (b) richtig. Die korrekte Antwort lautet also (c).

4. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ sind korrekt?

√ (a) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -3$.

√ (b) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

√ (c) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

(d) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$.

Für jede x_0,y_0,y_1 gibt es eine eindeutige Lösung $x \mapsto y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$. Also sind (b) und (c) korrekt. (a) ist auch korrekt, denn es eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0, y'(0) = 1$ gibt und für diese Lösung gilt es $y''(0) = -3y'(0) - 2y(0) = -3$. Aussage (d) ist nicht korrekt, denn für jedes wert $y_1 \in \mathbb{R}$ gibt es eine Lösung mit $y(0) = 0, y'(0) = y_1$.

Offene Aufgaben

5. Bestimmen Sie die Gleichung der durch den Punkt $(1, 1)$ gehenden Lösungskurve der Differentialgleichung

$$(y^2 - 3x^2) + 2xyy' = 0.$$

Hinweis: Exakte Differentialgleichung.

Lösung:

Diese Differentialgleichung ist exakt, wie man leicht bestätigt. Die Lösungen sind die Niveaulinien der Funktion $g(x, y)$ mit den partiellen Ableitungen

$$g_x = y^2 - 3x^2 \quad \text{und} \quad g_y = 2xy.$$

Integrieren ergibt

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \int g_x \,\mathrm{d}x = \int (y^2 - 3x^2)\,\mathrm{d}x = y^2x - x^3 + k(y) \\ g(x,y) &= \int g_y \,\mathrm{d}y = \int 2xy\,\mathrm{d}y = xy^2 + l(x) \end{aligned}$$

und daraus folgt, dass

$$g(x, y) = xy^2 - x^3.$$

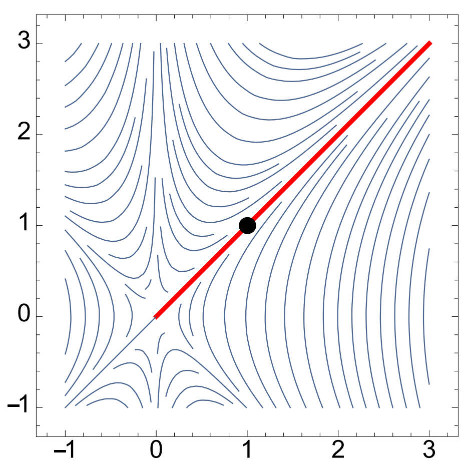
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also durch die Schar

$$xy^2 - x^3 = C$$

gegeben. Die durch $(1, 1)$ gehende Lösung ist die Niveaulinie zum Niveau 0, denn $C = g(1, 1) = 0$. Wir bemerken, dass

$$xy^2 - x^3 = x(y - x)(y + x) = 0.$$

Deshalb besteht das Niveau 0 aus den drei Geraden $x = 0, y = x, y = -x$. Die Lösung ist dann in einer Umgebung von $(1, 1)$ die Gerade $y = x$ (z.B. in $(0, \infty)$.)



6. Bestimmen Sie die Kurvenschar der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y^2 \cdot (y')^2 + y^2 - 1 = 0, \quad y = y(x) > 0$$

sowie ihre Enveloppen.

Lösung: Die Gleichung ist äquivalent zu $yy' = \pm\sqrt{1-y^2}$. Somit ist sie separierbar:

$$\begin{aligned} yy' = \pm\sqrt{1-y^2} \quad &\Longrightarrow \quad \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \pm\int \mathrm{d}x \\ &\Longleftrightarrow \quad -\sqrt{1-y^2} = \pm x + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow \quad 1-y^2 = (\pm x + C)^2 = (x \pm C)^2 \\ &\overset{y>0}{\Longleftrightarrow} \quad y(x) = \sqrt{1-(x-K)^2} \end{aligned}$$

wobei $K = \mp C$. Man kann überprüfen, dass die Kurvenschar

$$y = \sqrt{1-(x-K)^2}, \quad K \in \mathbb{R}$$

tatächlich die allgemeine Lösung der originalen Differential gleichung ist. Diese Schar beschreibt alle oberen Halbkreise mit Radius 1 und Mittelpunkt auf der x-Achse (ohne die Punkte auf dieser Achse).

Bemerkung: Wenn wir die Differentialgleichung in der Form $y' = f(y)$, d.h. $y' = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}$ schreiben, ist die Funktion $f(y) = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}$ bei $y = 1$ nicht stetig differenzierbar. Insbesondere sind die Voraussetzungen des Satzes über Eindeutigkeit der Lösungen (Stammbach, Kapitel VII, Satz 3.1) nicht erfüllt.

Geometrisch kann man feststellen, das $y = 1$ eine Enveloppe der Kurvenschar und somit eine singuläre Lösung der Differentialgleichung ist. Dies lässt sich auch analytisch zeigen: Wenn man $F(x, y, K) := (x-K)^2 + y^2 - 1$ definiert, müssen die Enveloppen die Gleichungen

$$(x-K)^2 + y^2 = 1 \quad \text{und} \quad F_K(x, y, K) = -2(x-K) = 0$$

erfüllen. Hier müssen wir nun den Scharparameter K eliminieren. Aus der zweiten Gleichung folgt $x = K$ und aus der ersten somit, dass $y = 1$ ist. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung lässt sich überprüfen, dass diese konstante Funktion tatsächlich eine Lösung ist.

7. Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$\frac{y-1}{x-1} = C.$$

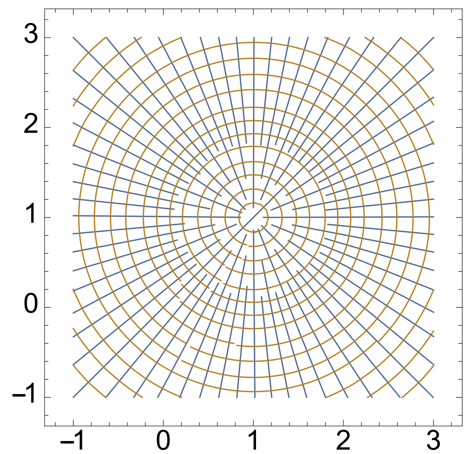
Skizzieren Sie diese Trajektorien.

Lösung:

Nach Ableiten erhält man $\frac{y'(x-1)-(y-1)}{(x-1)^2} = 0$. Somit ist $y' = \frac{y-1}{x-1}$ die Differentialgleichung der Kurvenschar und entsprechend $y' = -\frac{x-1}{y-1}$ die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien. Diese ist separierbar.
Man findet als Lösung

$$\begin{aligned} dy(y-1) &= -dx(x-1) \\ \int (y-1)dy &= -\int (x-1)dx \\ \frac{1}{2}y^2 - y &= -(\frac{1}{2}x^2 - x) + C_1 \\ \frac{1}{2}y^2 - y + \frac{1}{2}x^2 - x &= C_1 \\ (y-1)^2 + (x-1)^2 &= C \end{aligned}$$

Die Orthogonaltrajektorien sind also Kreise mit Zentrum $(1, 1)$.



8. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y - xy' = \sqrt{(y')^2 + 1}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine und die singuläre Lösung. Welche geometrische Form hat die Enveloppe der Lösungsschar?

Lösung:

Die Differentialgleichung $y - xy' = \sqrt{(y')^2 + 1}$ ist eine Clairaut'sche Differentialgleichung (vgl. Stammbach, Kapitel VII.7). Die allgemeine Lösung ist die Schar von Geraden

$$y(x) = Cx + \sqrt{C^2 + 1}.$$

Die Singuläre Lösung ist die Enveloppe der Schar und hat Parameterdarstellung

$$x(C) = \frac{-C}{\sqrt{C^2+1}}$$
$$y(C) = \frac{1}{\sqrt{C^2+1}}.$$

Wir eliminieren das Parameter C:

$$x^2 + y^2 = \frac{C^2}{C^2+1} + \frac{1}{C^2+1} = 1,$$

Aus der Parameterdarstellung der Enveloppe sehen wir, dass die y-Koordinate positiv ist. Daraus folgt, dass die Enveloppe der Lösungsschar die obere hälfte des Einheitskreises ist.

9. Betrachten Sie die 3-parametrige Kurvenschar

$$y(x) = C_1 \cosh(C_3 x) + C_2 \sinh(C_3 x)$$

mit den Parametern $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine zugehörige Differentialgleichung.

Lösung: Die Schar

$$y(x) = C_1 \cosh(C_3 x) + C_2 \sinh(C_3 x) \quad (1)$$

hat 3 Parameter. Deshalb wird die zugehörige Differentialgleichung dritter Ordnung sein. Durch Ableitung nach x bekommen wir

$$y' = C_1 C_3 \sinh(C_3 x) + C_2 C_3 \cosh(C_3 x) \quad (2)$$

$$y'' = C_1 C_3^2 \cosh(C_3 x) + C_2 C_3^2 \sinh(C_3 x) \quad (3)$$

$$y''' = C_1 C_3^3 \sinh(C_3 x) + C_2 C_3^3 \cosh(C_3 x) \quad (4).$$

Aus den Gleichungen $(1), (2), (3), (4)$ sind nun die Parameter C_1, C_2, C_3 zu eliminieren. Division von (4) durch (2) liefert

$$\frac{y'''}{y'} = C_3^2.$$

Ferner ergibt sich aus (1) und (3) die Gleichung

$$y'' - C_3^2 y = 0.$$

Als Differentialgleichung der Schar erhalten wir somit

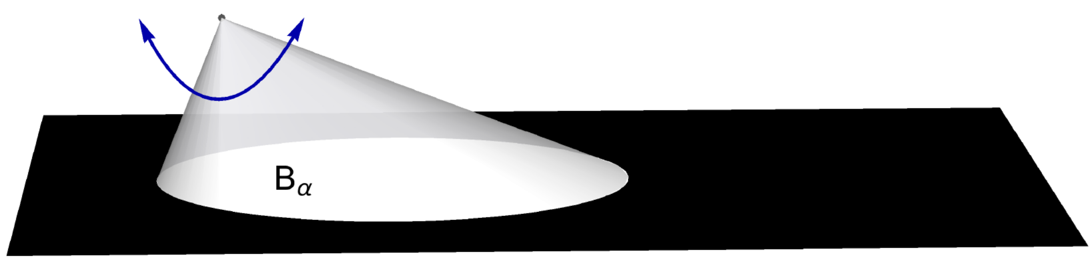
$$y'y'' - y'''y = 0.$$

Bemerkung: Die Schar $y(x) = C_1 \cosh(C_3 x) + C_2 \sinh(C_3 x)$ entspricht Anfangsbedingungen mit $\frac{y''}{y}$ positiv (oder Null). Das Beispiel von Stammbach, Kapitel VII, S. 67-68 zeigt, dass die Schar $y(x) = C_1 \cos(C_3 x) + C_2 \sin(C_3 x)$ eine Lösung der selben Differentialgleichung ist. Diese entspricht Anfangsbedingungen mit $\frac{y''}{y}$ negativ (oder Null).

10. Ein schwenkbarer Lichtkegel im Raum beleuchtet in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ den Bereich

$$B_\alpha = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot \sin\alpha + \cos\alpha \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 1}{2}} \right\}$$

in der (x, y)-Ebene.



(a) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ jeweils die Gleichung der Randkurve ∂B_α von B_α in möglichst einfacher Form. Um was für eine Kurve handelt es sich jeweils? Skizzieren Sie die drei Kurven in der (x, y)-Ebene.
Hinweis: Im Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist auf das Vorzeichen von x zu achten.

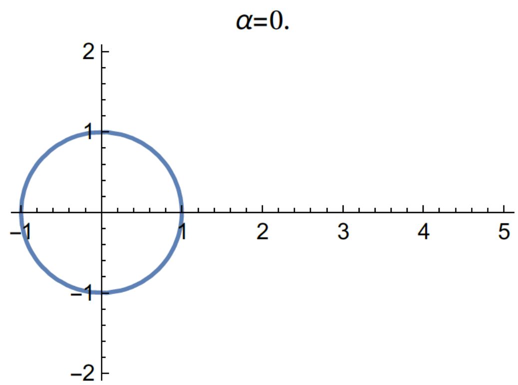
(b) Bestimmen Sie die Begrenzung des beleuchtbaren Bereichs, d.h. die Gleichung der Enveloppe der Kurvenschar ∂B_α.

Lösung:

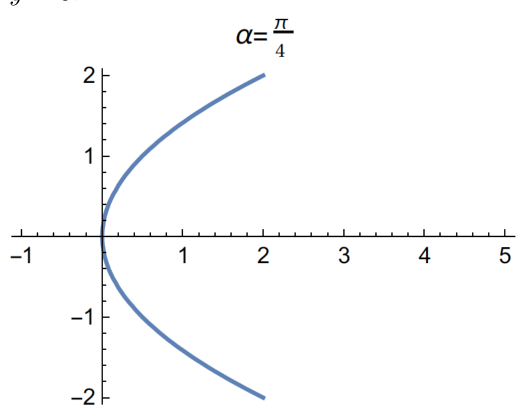
(a) Die Randkurve ∂B_α erhalten wir einfach, indem wir die Ungleichung in der Definition von B_α durch eine Gleichung ersetzen, d.h.

$$\partial B_\alpha = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 1}{2}} \right\}.$$

- $\alpha = 0$
  Dann ist
$$\partial B_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 = \sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{2}}\right\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 = x^2+y^2+1\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}.$$
  Dabei handelt es sich um den Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1.

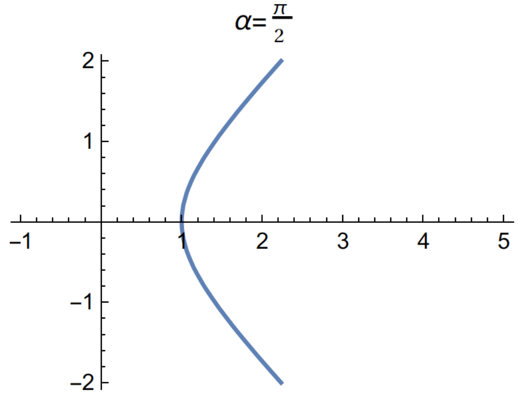


- $\alpha = \frac{\pi}{4}$
  Dann gilt
$$\partial B_{\frac{\pi}{4}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{2}}\right\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 = x^2+y^2+1\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 2x\right\}.$$
  Dabei handelt es sich um eine nach rechts geöffnete Parabel mit Scheiten bei $(0,0)$ und Symmetrieachse $y = 0$.



- $\alpha = \frac{\pi}{2}$
  Dann gilt
$$\partial B_{\frac{\pi}{2}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{2}}\right\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 = x^2+y^2+1,\ x > 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2+1, x > 0\}.$$

Dabei haben wir beim Quadrieren der obersten Gleichung benutzt, dass die Wurzel positiv ist (und deshalb $x > 0$ gelten muss). Es haldelt sich um eine nach rechts geöffneten Hyperbelast mit Scheitel bei $(1,0)$ und Symmetrieachse $y = 0$.



(b) Die Kurvenschar ∂B_α ist gegeben durch die Nullstellenmenge der Funktion

$$F(x,y,\alpha) := x \cdot \sin\alpha + \cos\alpha - \sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{2}},$$

wobei $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ der Scharparameter ist. Für die Gleichung der Enveloppe müssen wir diese Gleichung nach α ableiten:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = x\cos\alpha - \sin\alpha \overset{!}{=} 0.$$

Daraus folgt $x = \tan\alpha$ (falls α nicht gleich $\pm\frac{\pi}{2}$ ist - diese zwei Spezialfälle am Rand beinflussen die Enveloppe nicht.

Variante 1 - Einsetzen von $x = \tan\alpha$ und auflösen nach y:

$$\begin{aligned}
F(x,y,\alpha)|_{x=\tan\alpha} = 0 \Leftrightarrow \quad & \tan\alpha\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\tan^2\alpha+y^2}{2}} \\
\Leftrightarrow \quad & 2\tan^2\alpha\sin^2\alpha + 4\tan\alpha\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha + y^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\tan^2\alpha\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha - \tan^2\alpha + 1 = y^2.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Identität $\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ folgt

$$\begin{aligned}
y^2 &= \frac{2\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \\
&= \frac{2\sin^4\alpha(\sin\alpha + \cos^2\alpha) - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \\
&= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},
\end{aligned}$$

also $y = \pm\frac{1}{\cos\alpha}$. Es gibt deshalb zwei Kurven, die Enveloppen der Schar ∂B_α sind, und deren Parametrisierung ist gegeben durch

$$\vec{r}(\alpha) = \left(\tan\alpha, \pm\frac{1}{\cos\alpha}\right), \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Variante 2 - Quadrieren und auflösen

Wir quadrieren die Gleichung der Kurvenschar und der Enveloppe und erhalten

$$\begin{aligned}
& x^2\sin^2\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \frac{x^2+y^2+1}{2}, \\
& x^2\cos^2\alpha - 2x\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha = 0.
\end{aligned}$$

Summieren ergibt

$$\begin{aligned} x^2+1 &= \frac{x^2+y^2+1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad 2x^2+2 &= x^2+y^2+1 \\ \Leftrightarrow \quad x^2+1 &= y^2. \end{aligned}$$

Bei dieser Kurve $y^2 - x^2 = 1$ handelt es sich um eine nach oben und unten geöffnete Hyperbel mit Scheitel $(0, \pm 1)$ und Symmetrieachse $x = 0$. Der maximal beleuchtbare Bereich wir durch die zwei Hyperbeläste begrenzt.