D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2021
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Lösung Serie 25

MC-Aufgaben

1. Wie lautet die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung $y''' + 2y' + y = 0$?

√ (a) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$

(b) $\lambda^3 + 2\lambda = 0$

(c) $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

(d) $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

Einsetzen des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$ liefert die charakteristische Gleichung (oder das charakteristische Polynom) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$.

2. Was kann man über eine Differentialgleichung der Form $y'' + ay' + by = e^x$ mit konstanten Koeffizienten a und b immer sagen?

(a) Ihre Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 2.

Falsch. Die Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Gleichung ist kein Vektorraum, da zum Beispiel die konstante Funktion 0 keine Lösung ist.

(b) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt αe^x für eine Konstante α.

Falsch. Der Ansatz $y = \alpha e^x$ führt auf $\alpha = \frac{1}{1+a+b}$. Die Aussage ist also nur dann richtig, wenn $1 + a + b \neq 0$.

(c) Ihre allgemeine Lösung lautet $y_h(x) + \alpha e^x$, wobei y_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist und α eine Konstante ist.

Falsch. Diese Antwort ist äquivalent zu (b).

√ (d) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, e^x$ für Konstanten $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

Richtig. Im Fall $1 + a + b \neq 0$ ist $\frac{1}{1+a+b} e^x$ eine partikuläre Lösung (vgl. (b)).
Im Fall $1 + a + b = 0$ führt der Ansatz $y = \beta x e^x$ auf $\beta = \frac{1}{a+2}$ oder, falls $a + 2 = 0$, der Ansatz $y = \gamma x^2 e^x$ auf $\gamma = \frac{1}{2}$.

3. Die allgemeine Lösung der Euler'schen Differentialgleichung

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

ist gleich...

(a) $y(x) = C_1x + C_2x \ln x + C_3x(\ln x)^2$

(b) $y(x) = C_1x + C_2x^2$

(c) $y(x) = C_1x \ln x + C_2(\ln x)^2$

$\surd$ (d) $y(x) = C_1x + C_2x \ln x$

Das Indexpolynom

$$\alpha(\alpha - 1) - \alpha + 1 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2$$

hat die doppelte reelle Nullstelle $\alpha = 1$. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist also

$$y(x) = C_1x + C_2x \ln x$$

4. Das Indexpolynom einer (homogenen) Eulerschen Differentialgleichung der Ordnung 4 hat die doppelte komplexe Nullstelle $\alpha = \pm i$. Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

(a) $C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$

(b) $C_1 \cos(x) + C_2x \cos(x) + C_3 \sin(x) + C_4x \sin(x)$

(c) $C_1 + C_2 \cos(\ln x) + C_3(\ln x) \cos(\ln x) + C_4 \sin(\ln x) + C_5(\ln x) \sin(\ln x)$

$\surd$ (d) $C_1 \cos(\ln x) + C_2(\ln x) \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x) + C_4(\ln x) \sin(\ln x)$

(e) $C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + C_3$

Die richtige Antwort ist (d). Siehe Skript von Stammbach, Teil C, Kapitel VII.10, Seite 87 für eine Erklärung.

Offene Aufgaben

5. Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$. **Lösung:** Die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-x} \tag{1}$$

ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir suchen zuerst die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differenzialgeichung

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{2}$$

Den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, eingesetzt in (2) liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) \\ \Longrightarrow p(\lambda) &:= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ besitzt eine doppelte Nullstelle $\lambda = -1$. Wir erhalten somit die zwei linear unabhängige Lösungen von (2)

$$y_1(x) = e^{-x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = xe^{-x}. \tag{3}$$

Die allgemeine Lösung von (2) ist somit gegeben durch

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \overset{(3)}{=} (C_1 + C_2 x)\, e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Wir suchen nun eine partikuläre Lösung y_p von (1). Dazu verwenden wir das Verfahren von Lagrange und machen den Ansatz

$$y(x) = \gamma_1(x) y_1(x) + \gamma_2(x) y_2(x).$$

$\gamma_1(x)$ und $\gamma_2(x)$ lassen sich durch

$$\begin{aligned} \gamma_1'(x) y_1(x) + \gamma_2'(x) y_2(x) &= 0 \\ \gamma_1'(x) y_1'(x) + \gamma_2'(x) y_2'(x) &= q(x), \end{aligned}$$

wobei $q(x)$ die Inhomogenität ist, gewinnen (siehe Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 79–80).

$$\begin{aligned} \gamma_1'(x) e^{-x} + \gamma_2'(x) x e^{-x} &= 0 \\ -\gamma_1'(x) e^{-x} + \gamma_2'(x)\left(e^{-x} - xe^{-x}\right) &= 4e^{-x} \\ \Longrightarrow \gamma_2' e^{-x} = 4e^{-x} \quad \Longrightarrow \gamma_2' = 4 \quad \Longrightarrow \gamma_2 &= 4x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R} \\ \Longrightarrow \gamma_1' = -4x \quad \Longrightarrow \gamma_1 &= -2x^2 + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung von (1) ist dann gegeben durch

$$y(x) = (-2x^2 + c_1) e^{-x} + (4x + c_2) x e^{-x} = (c_1 + x c_2 + 2x^2) e^{-x}.$$

6. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y''' + y'' + y' + y + x + 1 = 0$ mit $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

Lösung: Das charakteristische Polynom lautet $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = \frac{\alpha^4 - 1}{\alpha - 1}$ und hat die Nullstellen $-1, \pm i$. Eine partikuläre Lösung ist $y_{\mathrm{p}}(x) = -x$.
Die allgemeine Lösung lautet somit $y(x) = C_1\, e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x$.
Die Anfangsbedingungen geben $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 3$.
Die gesuchte Lösung ist also $y(x) = e^{-x} + 3 \sin x - x$.

7. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - (2\alpha - 4)y' + (8 - 4\alpha)y = 0.$$

(a) Für welche Werte von α gibt es sowohl Lösungen, die für $x \to \infty$ konvergieren (aber ungleich der konstanten Funktion 0 sind) als auch Lösungen, die für $x \to \infty$ nicht konvergieren?

(b) Für welche α gibt es Lösungen y, die für $x \to \infty$ konvergieren mit $\lim_{x\to\infty} y(x) \neq 0$?

Lösung: Die Differentialgleichung

$$y'' - (2\alpha - 4)\, y' + (8 - 4\alpha)\, y = 0 \tag{5}$$

ist eine homogene lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Der Ansatz $y\,(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, liefert $(y'\,(x) = \lambda e^{\lambda x},\ y''\,(x) = \lambda^2 e^{\lambda x})$

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2 e^{\lambda x} - (2\alpha - 4)\,\lambda e^{\lambda x} + (8 - 4\alpha)\, e^{\lambda x} \\ &= \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \left[\lambda^2 - (2\alpha - 4)\,\lambda + (8 - 4\alpha)\right]. \\ \Longrightarrow p\,(\lambda) &:= \lambda^2 - (2\alpha - 4)\,\lambda + (8 - 4\alpha) = 0 \end{aligned}$$

Wir berechnen die Nullstellen von $p\,(\lambda)$ (charakteristisches Polynom von (5))

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2\alpha - 4 + \sqrt{(2\alpha - 4)^2 - 4\,(8 - 4\alpha)}}{2} = \alpha - 2 + \sqrt{\alpha^2 - 4} \quad \text{und} \\ \lambda_2 &= \frac{2\alpha - 4 - \sqrt{(2\alpha - 4)^2 - 4\,(8 - 4\alpha)}}{2} = \alpha - 2 - \sqrt{\alpha^2 - 4}. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden folgende Fälle.

$\underline{\alpha > 2}$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha - 2 + \sqrt{\alpha^2 - 4} > 2 - 2 + \sqrt{\alpha^2 - 4} = \sqrt{\alpha^2 - 4} > 0 \\ \lambda_2 &< 0, \quad \text{da} \quad \lambda_2 = \alpha - 2 - \sqrt{\alpha^2 - 4} < 0 \Longleftrightarrow 0 < \alpha - 2 < \sqrt{\alpha^2 - 4} \\ &\Longleftrightarrow (\alpha - 2)^2 < \left(\sqrt{\alpha^2 - 4}\right)^2 \Longleftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 < \alpha^2 - 4 \\ &\Longleftrightarrow -4\alpha < -8 \Longleftrightarrow \alpha > 2 \end{aligned}$$

Zusammenfassend: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (insbesondere ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Somit sind alle Lösungen von der Form (oder Linearkombinationen dieser Formen)

$$\begin{aligned} &ae^{\lambda_1 x} \to \pm\infty \text{ oder } 0 \ \ (x \to \infty)\,, \ a \in \mathbb{R} \text{ (je nachdem, ob } a > 0, < 0 \text{ oder } = 0 \text{ ist)} \\ &be^{\lambda_2 x} \to 0 \ \ (x \to \infty)\,, \ b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\underline{\alpha = 2}$:

Es ist $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$. Alle Lösungen sind von der Form (oder Linearkombinationen dieser Formen)

$$\begin{aligned} &ae^{\lambda_1 x} = a \ \text{ (insbesondere konvergent für } x \to \infty)\,, \ a \in \mathbb{R} \\ &bxe^{\lambda_2 x} = bx \to \pm\infty \text{ oder } 0 \ \ (x \to \infty)\,, \ b \in \mathbb{R} \text{ (je nachdem, ob } b > 0, < 0 \text{ oder } = 0 \text{ ist).} \end{aligned}$$

$\underline{-2 < \alpha < 2}$:

Es gilt $\alpha^2 - 4 < 0$. Es folgt, dass $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Re}\,(\lambda_1)$, $\mathrm{Re}\,(\lambda_2) < 0$ (da $\alpha - 2 < 0$). Alle Lösungen sind von der Form (oder Linearkombinationen dieser Formen)

$$\begin{aligned} &a\, e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)x}\, e^{i\mathrm{Im}(\lambda_1)x} \to 0 \ \ (x \to \infty)\,, \ a \in \mathbb{R} \\ &b\, e^{\mathrm{Re}(\lambda_1)x}\, e^{-i\mathrm{Im}(\lambda_1)x} \to 0 \ \ (x \to \infty)\,, \ b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\underline{\alpha \leq -2}$:
Es gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \underbrace{\alpha - 2}_{<0} - \sqrt{\underbrace{\alpha^2 - 4}_{\geq 0}} < 0 \\
\lambda_1 &= \alpha - 2 + \sqrt{\alpha^2 - 4} < \alpha - 2 + \sqrt{\alpha^2 + 4} < \alpha - 2 + \sqrt{\alpha^2 \underbrace{-4\alpha}_{>0} + 4} \\
&= \alpha - 2 + \sqrt{(\alpha - 2)^2} = \alpha - 2 + \Big|\underbrace{\alpha - 2}_{\leq 0}\Big| = \alpha - 2 - (\alpha - 2) = 0.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, d.h. wir haben exponentielles Abklingen, somit gehen alle Lösungen gegen 0 für $x \to \infty$.
Die Antworten lauten somit

(a) $\alpha \geq 2$.

(b) $\alpha = 2$.

8. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{x} y' + \dfrac{1}{x^2} y = 1, \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

für die Funktion $y = y(x)$, $x > 0$.

Hinweis: Für die partikuläre Lösung können Sie den Ansatz $y_p(x) = A + Bx + Cx^2$ wählen.

Lösung: Es handelt sich um eine inhomogene Eulersche Differentialgleichung zweiten Grades. Für die zugehörige homogene Gleichung benutzen wir den Ansatz $y(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessen Ableitungen sind $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ und $y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$; und Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
0 &= (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}) - \frac{1}{x}(\alpha x^{\alpha-1}) + \frac{1}{x^2} x^\alpha \\
&= \Big(\alpha(\alpha-1) - \alpha + 1\Big) x^{\alpha-2}.
\end{aligned}$$

Da $x > 0$ nach Voraussetzung, können wir mit $x^{\alpha-2} \neq 0$ kürzen und erhalten das Indexpolynom

$$0 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\alpha = 1$. Deshalb lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C_1 x + C_2 x \ln x$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. (Durch Einsetzen in die DGL kann man das Resultat prüfen.)

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung versuchen wir einen quadratischen polynomiellen Ansatz

$$y_p(x) = A + Bx + Cx^2, \qquad \text{mit } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die ursprüngliche DGL ergibt

$$\begin{aligned}
x^2 &= x^2 \cdot 2C - x \cdot (B + 2Cx) + (A + Bx + Cx^2) \\
&= x^2 \cdot C + A.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $C = 1$ und $A = 0$. Der Wert von B ist egal, und da wir nur eine partikuläre Lösung suchen, setzen wir der Einfachheit halber $B = 0$. Wir erhalten also $y_p(x) = x^2$. (Durch Einsetzen in die DGL kann man prüfen, dass y_p eine Lösung ist.)

Die allgemeine Lösung ist die Summe der homogenen Lösung und einer partikulären Lösung, also

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 x + C_2 x \ln x + x^2.$$

Aus den Anfangsbedingungen $0 = y(1) = 1+C_1$ und $0 = y'(1) = 2+C_1+C_2$ ergibt sich $C_1 = -1$ und $C_2 = -2 - C_1 = -1$. Also lautet die gesuchte Lösung unseres Anfangswertproblems

$$y(x) = x^2 - x - x \ln x.$$

Bemerkung: Alternativ zum quadratischen Ansatz kann man auch hier wieder die Variation der Konstanten durchführen und erhält das gleiche Ergebnis.

9. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + (\lambda - 4)\, y' + \frac{1}{2}\,\lambda\, y = 0\,.$$

Für welche Werte des reellen Parameters λ gibt es eine von Null verschiedene Lösung $y(x)$, die für $x \to \infty$ beschränkt bleibt?

Lösung: Man berechnet zuerst die Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms $\mu^2 + (\lambda - 4)\mu + \frac{1}{2}\,\lambda = 0$ (in der Variablen μ). Diese sind

$$\mu = \frac{1}{2}\big(4 - \lambda \pm \sqrt{(\lambda - 4)^2 - 2\lambda}\,\big) = \frac{1}{2}\big(4 - \lambda \pm \sqrt{(\lambda - 5)^2 - 9}\,\big).$$

Bezeichnen wir durch μ_1 (bzw. μ_2) die Nullstelle mit $-$ (bzw. mit $+$). Hier unterscheiden wir drei Fälle:

- Wenn die Nullstelle(n) reell sind (d.h. wenn $\lambda \geq 8$ oder $\lambda \leq 2$), dann ist die allgemeine Lösung der Gleichung der Gestalt

  $$y(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x},$$

  wenn $\mu_1 \neq \mu_2$, oder

  $$y(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 x e^{\mu_1 x},$$

  wenn $\mu_1 = \mu_2$. Man bemerke $\mu_2 \geq \mu_1$; wenn $\mu_1 > 0$, bleibt also y für $x \to \infty$ genau dann beschränkt, wenn $C_1 = C_2 = 0$. Anders gesagt: $\mu_1 \leq 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Existenz einer von Null verschiedenen Lösung der Gleichung. Sie ist auch hinreichend, denn $y(x) = C_1 e^{\mu_1 x}$ für $C_1 \neq 0$ ist immer beschränkt und nicht Null, wenn $\mu_1 \leq 0$.

  Diese Bedingung können wir als Funktion von λ umformulieren, wie folgt:

  $$\begin{aligned} \mu_1 \leq 0 &\Longleftrightarrow \big(\lambda \geq 4 \quad \text{oder} \quad (\lambda - 4)^2 \leq (\lambda - 5)^2 - 9\big) \\ &\Longleftrightarrow (\lambda \geq 4 \quad \text{oder} \quad \lambda \leq 0)\,. \end{aligned}$$

  Nach unserer Anfangsannahme (reelle Nullstellen) ist also $\mu_1 \leq 0$ genau dann, wenn $\lambda \geq 8$ oder $\lambda \leq 0$.

- Wenn die Nullstellen nicht reell und konjugiert sind (d.h. wenn $2 \leq \lambda \leq 8$), dann ist die allgemeine Lösung der Gestalt

  $$y(x) = e^{\frac{4-\lambda}{2} x} \left(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x\right),$$

  wobei $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{9 - (\lambda - 5)^2}$ ist. Die Existenz einer von Null verschiedenen Lösung dieser Gestalt ist genau dann garantiert, wenn $\frac{4-\lambda}{2} \leq 0$ ist, d.h. wenn $\lambda \geq 4$. Nach unserer Anfangsannahme (konjugierte komplexe Nullstellen) muss dann $4 \leq \lambda \leq 8$ sein.

Die Bedingung ist also $\lambda \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$.

10. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$r^2 u''(r) = -ru'(r) + u(r) + 2r, \quad \text{wobei} \quad r > 0.$$

(a) Finden Sie die Lösung $u(r)$ mit $u(1) = 0$ und $u'(1) = 0$.

(b) Finden Sie all diejenigen Lösungen $u(r)$, welche für $r \to 0$ konvergieren.

Lösung:

(a) Um die homogene Lösung dieser Eulerschen DGL zu finden, machen wir den Ansatz $u(r) = r^\alpha$. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL erhalten wir das Indexpolynom

$$\begin{aligned} 0 &= r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - r^\alpha \\ 0 &= \alpha^2 - \alpha + \alpha - 1. \\ \Longrightarrow \alpha &= \pm 1 \end{aligned}$$

Die homogene Lösung ist somit $u_h(r) = C_1 r + C_2 r^{-1}$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Für die partikuläre Lösung machen wir einen Ansatz mit Variation der Konstanten, dh.

$$u_p(r) = C_1(r)r + C_2(r)r^{-1}.$$

Wie in Stammbach, Teil C, Kapitel 9 (b) fordern wir zusätzlich zur ursprünglichen Differentialgleichung noch

$$C_1'(r)r + C_2'(r)r^{-1} = 0. \tag{6}$$

Unter Verwendung dieser Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} u_p' &= C_1'r + C_1 + C_2'r^{-1} - C_2r^{-2} = C_1 - C_2r^{-2}, \\ u_p'' &= C_1' - C_2'r^{-2} + 2C_2r^{-3}. \end{aligned}$$

Setzt man in die ursprüngliche Differentialgleichung (geteilt durch r^2) ein, erhält man

$$\begin{aligned} &C_1' - C_2'r^{-2} + 2C_2r^{-3} + C_1r^{-1} - C_2r^{-3} - C_1r^{-1} - C_2r^{-3} \\ =&C_1' - C_2'r^{-2} = \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man Gleichung (6) ergibt sich das Gleichungssystem

$$C_1'r + C_2'r^{-1} = 0, C_1' - C_2'r^{-2} = \frac{2}{r}.$$

Multiplizieren der zweiten Gleichung mit r und subtrahieren der ersten ergibt

$$-C_2'\frac{2}{r} = 2 \iff C_2' = -r.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung gibt $C_1' = 2/r + C_2'/r^2 = 1/r$. Durch Integration erhalten wir

$$C_1(r) = \ln(r) + C_{1,0}, C_2(r) = -\frac{1}{2}r^2 + C_{2,0}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$u(r) = (\ln(r) + C_{1,0})r + (-\frac{1}{2}r^2 + C_{2,0})\frac{1}{r}.$$

Die Bedingungen $u(1) = 0, u'(1) = 0$ sind erfüllt für

$$C_{1,0} - \frac{1}{2} + C_{2,0} = 0, C_{1,0} - (-\frac{1}{2} + C_{2,0}) = 0,$$

also $C_{1,0} = 0, C_{2,0} = 1/2$. Also folgt für die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(r) = \ln(r)r - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2r}.$$

(b) Aus a) sieht man, dass die allgemeine Lösung der DGL geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} u(r) &= (\ln(r) + C_{1,0})r + (-\frac{1}{2}r^2 + C_{2,0})\frac{1}{r} \\ &= C_1 r + C_2 r^{-1} + \ln(r)r, \end{aligned}$$

für $C_1 = C_{1,0} - \frac{1}{2}$, $C_2 = C_{2,0}$. Da $(\ln(r)r) \to 0$ für $r \to 0$, konvergiert diese Lösung für $r \to 0$ genau dann wenn $C_2 = 0$. D.h. die gesuchten Lösungen sind gegeben durch

$$u(r) = C_1 r + \ln(r)r \quad \text{mit } C_1 \in \mathbb{R}.$$

11. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 3x$$

und zeigen Sie, dass sie nur eine auf der ganzen reellen Achse definierte Lösung hat.

Lösung: Dies ist eine inhomogene Eulersche Differentialgleichung. Die Lösung des homogenen Problems findet man mit Hilfe des Indexpolynoms.

$$\alpha(\alpha - 1) + 4\alpha + 2 = \alpha^2 + 3\alpha + 2 = (\alpha + 1)(\alpha + 2)$$

Die allgemeine Lösung lautet dann $y_{\mathrm{h}}(x) = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-2}$. Für eine partikuläre Lösung drängt sich der Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = A\,x$ auf. Man findet $A = \frac{1}{2}$.

[Wer keinen passenden Ansatz für eine partikuläre Lösung findet, kommt mit dem Verfahren von Lagrange (Skript Kapitel VII S. 79/80) zum Ziel. Eine partikuläre Lösung ist von der Form $y_{\mathrm{p}}(x) = \gamma_1(x)\,x^{-1} + \gamma_2(x)\,x^{-2}$, wobei man $\gamma_1'(x)\,x^{-1} + \gamma_2'(x)\,x^{-2} = 0$ annehmen darf. Man erhält dann das System

$$\gamma_1'\,x^{-1} + \gamma_2'\,x^{-2} = 0 \tag{7}$$

$$-\gamma_1'\,x^{-2} - 2\gamma_2'\,x^{-3} = \frac{3}{x}\,. \tag{8}$$

Aus (7) + $x \cdot$ (8) bekommt man $-\gamma_2'\,x^{-2} = 3$ oder $\gamma_2' = -3x^2$ oder $\gamma_2(x) = -x^3$, und durch Einsetzen in (7) bekommt man $\gamma_1'\,x^{-1} - 3 = 0$ oder $\gamma_1' = 3x$ oder $\gamma_1(x) = \frac{3}{2}x^2$. Man erhält für die partikuläre Lösung $y_{\mathrm{p}}(x) = \frac{3}{2}x - x = \frac{1}{2}x$.]

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{1}{2}x\,.$$

Diese Lösung ist genau dann auf der ganzen reellen Achse definiert, wenn $C_1 = C_2 = 0$. Die gesuchte Lösung lautet so:

$$\boxed{y(x) = \frac{x}{2}}$$

12. Eine Lösungskurve $y = u(x)$ der Differentialgleichung $y'' - 3y' - 4y = 0$ schneidet eine Lösungskurve $y = w(x)$ der Gleichung $y'' + 4y' - 5y = 0$ im Ursprung. An dieser Stelle haben beide Kurven die selbe Steigung. Bestimmen Sie die Funktionen u und w, wenn ausserdem die Bedingung

$$\lim_{x \to \infty} \frac{w(x)^4}{u(x)} = \frac{5}{6}$$

erfüllt wird.

Lösung: Die charakteristischen Gleichungen der DGL $y'' - 3y' - 4y = 0$ und $y'' + 4y' - 5y = 0$ sind

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \text{ bzw.}$$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda + 5)(\lambda - 1) = 0.$$

Dann sind die gesuchten Integralkurven u und w der Gestalt

$$u(x) = A_1 e^{4x} + A_2 e^{-x}, \quad w(x) = B_1 e^{-5x} + B_2 e^{x}$$

für zu bestimmende Konstanten A_1, A_2, B_1, $B_2 \in \mathbb{R}$. Da beide Kurven durch den Ursprung durchgehen, sind

$$u(0) = A_1 + A_2 = 0 \text{ und } w(0) = B_1 + B_2 = 0.$$

Dies heisst $A_1 = -A_2$ und $B_1 = -B_2$. Somit hat man:

$$u(x) = A_1 \left(e^{4x} - e^{-x}\right), \quad w(x) = B_1 \left(e^{-5x} - e^{x}\right).$$

Da die Kurven die selbe Steigung im Ursprung haben, gilt $u'(0) = w'(0)$. Die Ableitungen von u und w sind

$$u'(x) = A_1 \left(4e^{4x} + e^{-x}\right), \quad w'(x) = B_1 \left(-5e^{-5x} - e^{x}\right)$$

Nach Auswertung auf $x = 0$ erhält man die Gleichung

$$5A_1 = -6B_1 \qquad (1).$$

Wir untersuchen schliesslich die Bedingung des Limes, um die letzte benötigte Gleichung zu bekommen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w(x)^4}{u(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(B_1\left(e^{-5x} - e^{x}\right)\right)^4}{A_1\left(e^{4x} - e^{-x}\right)} = \frac{B_1^4}{A_1} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(e^{-6x} - 1\right)^4}{1 - e^{-5x}} = \frac{B_1^4}{A_1} = \frac{5}{6}.$$

Daraus folgt, dass $A_1, B_1 \neq 0$ sind und

$$6B_1^4 = 5A_1 \qquad (2).$$

Es ergibt sich also aus (1) und (2), dass $B_1 = -1$ und $A_1 = \frac{6}{5}$ sind, und somit sind die gesuchten Integralkurven:

$$u(x) = \frac{6}{5}\left(e^{4x} - e^{-x}\right); \quad w(x) = e^{x} - e^{-5x}.$$