D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2021

Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 14

Am Ende des Übungsblattes finden sich die numerischen Lösungen der offenen Aufgaben, so dass Sie Ihre Lösungen rechtzeitig kontrollieren können.

MC-Aufgaben

1. Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung

(a) der minimalen partiellen Ableitung.

(b) entgegengesetzt zur maximalen partiellen Ableitung.

(c) des Gradienten.

(d) entgegengesetzt zum Gradienten.

(e) orthogonal zum Gradienten.

2. Gegeben ist die Funktion $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Kugeln mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

(b) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Ebenen senkrecht zum Vektor $(1, 3, 1)$.

(c) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Ellipsoiden mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

3. Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y, z) = x^2+y+z^3$ an der Stelle $(1, 2, 2)$ in Richtung des Einheitsvektors $\frac{1}{3}(2, 2, 1)$.

(a) $\dfrac{34}{3}$

(b) 6

(c) $(2, 1, 12)$

(d) $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 4)$

4. Bestimmen Sie jene Tangentialebenen an das Ellipsoid

$$2x^2 + 2y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1,$$

welche parallel zur Ebene $x + y + z = 1$ sind.

(a) $x + y + z = 0$.

(b) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\}$.

(c) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm\sqrt{5}\}$.

(d) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm 1\}$.

Offene Aufgaben

5. Sei

(a) $z(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ und $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$.

(b) $z(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ und $x(t) = e^{-t}$, $y(t) = e^t$.

Berechnen Sie die Ableitung $\frac{dz}{dt}$ durch die verallgemeinerte Kettenregel. Prüfen Sie Ihr Resultat durch explizites Ableiten von $z(x(t), y(t))$ nach t.

6. Eine Funktion von drei Variablen $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ besitzt im Ursprung in den drei Richtungen

$$\vec{a} = (1,0,0), \quad \vec{b} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \quad \vec{c} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

die Richtungsableitungen

$$D_{\vec{a}} f(0) = 3\,, \quad D_{\vec{b}} f(0) = -2\,, \quad D_{\vec{c}} f(0) = 5\,.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Niveaufläche von f im Ursprung.

7. Für welche Tripel von Funktionen $\varphi, \psi, \chi : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \neq 0\} \to \mathbb{R}$ existiert eine Funktion f, sodass $f_x = \varphi$, $f_y = \psi$ und $f_z = \chi$?

Falls f existiert, geben Sie f explizit an.

(a) $\varphi(x,y,z) = \frac{2x}{y}$, $\quad \psi(x,y,z) = 3y^2z^2 - \frac{x^2}{y^2}$, $\quad \chi(x,y,z) = 2y^3 z$.

(b) $\varphi(x,y,z) = e^y + 2xy^3z^2$, $\quad \psi(x,y,z) = xe^y + 3x^2y^2z^2$, $\quad \chi(x,y,z) = 2x^2y^3 + x$.

(c) $\varphi(x,y,z) = e^z y \cos(xy)\,$, $\quad \psi(x,y,z) = e^z x \cos(xy)\,$, $\quad \chi(x,y,z) = e^z \sin(xy)$.

(d) $\varphi(x,y,z) = ze^x$, $\quad \psi(x,y,z) = \frac{1}{z} \sin\left(\frac{y}{z}\right)\,$, $\quad \chi(x,y,z) = \frac{y}{z^2} \sin\left(\frac{y}{z}\right) + e^x$.

8. Gegeben ist die Funktion

$$f : (x,y,z) \longmapsto x^2 + 4x + y^2 + z^2 + 5.$$

Berechnen Sie die globalen Extrema von f auf der Kugel

$$B = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}.$$

Numerische Lösungen

5. (a) $\frac{dz}{dt} = 3 - 6\sin^2(t) - 4\sin(2t)$.

(b) $\frac{dz}{dt} = 2\frac{\sinh(2t)}{\cosh(2t)}$.

6. $3x - \frac{19}{4}y + \frac{103}{8}z = 0$.

7. (a)

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + y^3z^2 + c & \text{für } y > 0 \\ \dfrac{x^2}{y} + y^3z^2 + \tilde{c} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

c, $\tilde{c} \in \mathbb{R}$.

(b) $\psi_z \neq \chi_y$.

(c) $f(x,y,z) = e^z \sin(xy) + c$.

(d) $\psi_z \neq \chi_y$.

8. Min(f)=1 in $(-2, 0, 0)$, Max(f)= 37 in $(4, 0, 0)$.