Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 15

Am Ende des Übungsblattes finden sich die numerischen Lösungen der offenen Aufgaben, so dass Sie Ihre Lösungen rechtzeitig kontrollieren können.

MC-Aufgaben

1. Die Koordinatentransformation

$$x(u,v) = 2v,$$
$$y(u,v) = -2u$$

bildet Kreise auf Kreise ab.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

2. Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Gebiets

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \sin(x)\}.$$

(a) $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8})$

(b) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

(c) $(1, \frac{\pi}{4})$

(d) $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

3. Betrachten Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \int_0^x x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

Welche der folgenden Integrale sind gleich I?

(a) $\int_0^1 \int_0^y y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

(b) $\int_0^1 \int_0^y x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

(c) $\int_0^1 \int_y^1 x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

4. Sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\}$ die gefüllte Ellipse $(0,0)$ mit Hauptachsen $\sqrt{2}$ und 1. Dann gilt es

$$\int\int_D (2 - x^2 - 2y^2)\, dF \leq \int\int_B (2 - x^2 - 2y^2)\, dF$$

für alle Gebiete $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

5. Berechnen Sie das polare Flächenträgheitsmoment

$$J_0(D) = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$$

eines gleichseitigen homogenen Dreiecks mit Kantenlänge $a > 0$ bezüglich seines Schwerpunktes $S = (0,0)$.

(a) 0

(b) $4\sqrt{3}a^3$

(c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3 \cdot 16} a^4$

(d) a^4

Offene Aufgaben

6. Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x(u,v) &= 2u + v, \\ y(u,v) &= u - 3v. \end{aligned}$$

(a) Es bezeichne $\mathcal{R}$ das Einheitsquadrat in der xy-Ebene, also $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,1]$. Skizzieren Sie den Bereich $\widetilde{\mathcal{R}}$ der uv-Ebene, der unter dieser Transformation entsteht.

(b) Berechnen Sie die Einträge und die Determinante der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

(c) Vergleichen Sie das Resultat aus (b) mit dem Verhältnis der Flächen von $\mathcal{R}$ und $\widetilde{\mathcal{R}}$.

7. Gegeben sei eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Jedes Doppelintegral unten ergibt sich aus der Berechnung des Gebietsintegrales von f über ein gegebenes Gebiet S.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \int_{-\sin(x/2)}^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

Skizzieren Sie jeweils das Gebiet S und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge.

8. (a) Berechnen Sie

$$\iint_D x^2 y^2 \,\mathrm{d}F,$$

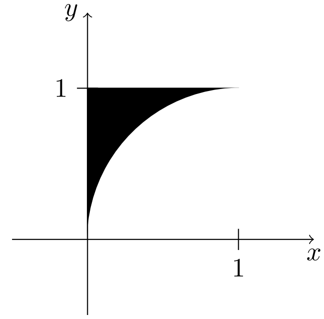
wobei D das durch die Kurven $y = x^2$ und $y = 1$ eingeschlossene Gebiet bezeichnet.

(b) Berechnen Sie

$$\iint_D x e^{x+y} \,\mathrm{d}F,$$

wobei $D = [0,1] \times [0,1]$ das Einheitsquadrat bezeichnet.

9. Sei $S = \{(x,y) \in [0,1]^2 : (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$.



Berechnen Sie den Schwerpunkt von S.

10. Für eine zweimal differenzierbare Funktion $f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$ in zwei Variablen ist der Laplace-Operator definiert als

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}.$$

Nach einer Koordinatentransformation nimmt der Laplace-Operator in polaren Koordinaten die Form

$$\Delta f \equiv \widetilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\widetilde{f}_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{f}_{\varphi\varphi}, \tag{1}$$

wobei $\widetilde{f}(\rho, \varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ die Funktion f nach Transformation zu Polarkoordinaten ist.

Sei nun $f : (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z)$ eine zweimal differenzierbare Funktion in drei Variablen. Der Laplace-Operator von f ist

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

(a) Berechnen Sie Δf für $f(x, y, z) = x^2 y + 2xz^{-1} + \sin(xz)$.

(b) Wie kann man die Formel aus (1) erweitern, um Δf in zylindrischen Koordinaten zu darstellen?

Bemerkung: Die zylindrische Koordinaten sind durch die Transformation

$$x(\rho, \varphi, z) = \rho\cos(\varphi), \quad y(\rho, \varphi, z) = \rho\sin(\varphi), \quad z(\rho, \varphi, z) = z,$$

gegeben, wobei $\rho > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $z \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie, unter Zuhilfenahme von Teil (b), Δf für

$$f(x, y, z) = \frac{1}{z}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - 2z\sqrt{x^2 + y^2}$$

und $x, y, z > 0$.

Numerische Lösungen

8. (a) $\frac{4}{27}$.

(b) $e - 1$.

9. $x_S = \frac{1}{1-\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right)$, $y_S = 1 - x_S$.

10. (a) $\Delta f = 2y + 4xz^{-3} - (x^2 + z^2)\sin(xz)$.

(b) $\Delta f = \widetilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\widetilde{f}_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{f}_{\varphi\varphi} + \widetilde{f}_{zz}$.

(c) $\Delta f(x, y, z) = -\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2\arctan\frac{y}{x}}{z^3}$.