D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2021

Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 16

Am Ende des Übungsblattes finden sich die numerischen Lösungen der offenen Aufgaben, so dass Sie Ihre Lösungen rechtzeitig kontrollieren können.

MC-Aufgaben

1. Es sei B ein Bereich in der (x, y)-Ebene und $\widetilde{B}$ der via Polarkoordinaten entsprechende Bereich in der (ρ, φ)-Ebene. Welchem Integral entspricht $\int\int_B xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$?

(a) $\displaystyle\int\int_{\widetilde{B}} \rho^2 \sin\varphi \cos\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi$

(b) $\displaystyle\int\int_{\widetilde{B}} \rho^3 \sin\varphi \cos\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi$

(c) $\displaystyle\int\int_{\widetilde{B}} \rho^3 \sin\varphi \cos^2\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi$

2. Es sei

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}F,$$

wobei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ bezeichne. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integration lässt sich I auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $\displaystyle I = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi$

(c) $\displaystyle I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

3. Das Integral der Funktion $f(x, y) \coloneqq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ über der Menge

$$B \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

ergibt

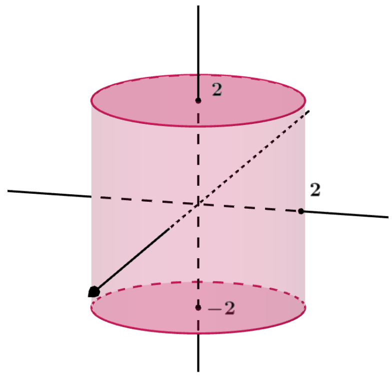
(a) $\frac{4\pi}{3}$.

(b) $\frac{16\pi}{3}$.

(c) 8π.

(d) $\frac{32\pi}{3}$.

4. Welche Parametrisierung in Kugelkoordinaten passt zu dieser Zeichnung?



(a) $\{(r, \varphi, \theta) \mid r = \frac{2}{\cos\theta}, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\}$.

(b) $\{(r, \varphi, \theta) \mid 1 \leq r \leq 3\}$.

(c) $\{(r, \varphi, \theta) \mid r = 4\cos\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

(d) $\{(r, \varphi, \theta) \mid r = \frac{2}{\sin\theta}, 0 < \theta < \pi\}$.

5. Sei T ein Tetraeder mit Eckpunkten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.
Berechnen Sie das Integral

$$\int\int\int_T f(x,y,z)dV,$$

mit $f(x,y,z) = x + y$.

(a) $\frac{4}{3}$

(b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{1}{2}$

6. Gegeben ist ein Zylinder Z (Dichte 1) mit Radius R und Höhe h der senkrecht auf der xy-Ebene steht. Welches der folgenden Integrale in Zylinderkoordinaten beschreibt das Trägheitsmoment J des Zylinders Z bezüglich der z-Achse?

(a) $\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h \rho \, dz \, d\rho \, d\varphi$

(b) $\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h \rho^2 \, dz \, d\rho \, d\varphi$

(c) $\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h \rho^3 \, dz \, d\rho \, d\varphi$

(d) $\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h \rho^4 \, dz \, d\rho \, d\varphi$

Offene Aufgaben

7. Das Trägheitsmoment eines homogenen geraden Kreiskegels K mit Masse m und Grundkreisradius R bezüglich einer Rotationsachse, die parallel zur Kegelachse ist, beträgt $\frac{11}{20}mR^2$. Wie gross ist der Abstand zwischen der Rotationsachse und der Achse des Kegels?

8. (a) Die Oberfläche einer Insel sei gegeben durch

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)/8} - e^{-2}.$$

Berechnen Sie das Volumen der Insel, welches über der Wasseroberfläche (Höhe $z = 0$) liegt.

(b) Sei K der endliche Körper, der im ersten Oktanten (d.h. $x, y, z > 0$) durch den Zylinder $y^2 + z^2 = 9$ und die Ebene $x = y$ begrenzt wird.
Erstellen Sie eine Skizze dieser Situation und berechnen Sie anschliessend das Volumen von K.

9. Ein gerader Kreiszylinder mit Radius R, $(x^2 + y^2 \leq R^2)$, und Höhe H, $(0 \leq z \leq H)$, habe eine Dichte von $\theta(x,y,z) = 1+x^2+y^2+z$. Berechnen Sie die Masse und das Trägheitsmoment bei Rotation um die Achse $a = \{(1,1,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

10. In der xy-Ebene werde der Bereich B durch die Strecke von $(0,0)$ nach $(1,0)$ und dem Kurvenbogen mit der Polardarstellung $\rho = \sin(\dfrac{\varphi}{4})$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ begrenzt.
Berechnen Sie das Volumen des über dem Bereich B liegenden Teils der Einheitskugel

$$\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Numerische Lösungen

7. $d = \frac{1}{2}R$

8. (a) $V = 2\pi(4 - \frac{12}{e^2})$.

(b) $V = 9$.

9. $m = \frac{\pi H R^2}{2}(2 + R^2 + H)$, $J = \pi H R^2 \left(\frac{R^2}{4}(6 + H) + \frac{R^4}{3} + H + 2 \right)$.

10. $V = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}$.