Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 17

Am Ende des Übungsblattes finden sich die numerischen Lösungen der offenen Aufgaben, so dass Sie Ihre Lösungen rechtzeitig kontrollieren können.

MC-Aufgaben

1. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ erklärt durch die Vorschrift

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Es sei $J(x,y)$ die Jacobimatrix der Funktion f an der Stelle (x,y). Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $\det J(x,y) = 1$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\det J(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) $\det J(x,y) = 0$ genau dann, wenn $(x,y) = (0,0)$.

(d) $\det J(x,y) = 16$ auf der Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

2. Die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation $\vec{r}(u,v) = (au\cos v, bu\sin v)$ ist

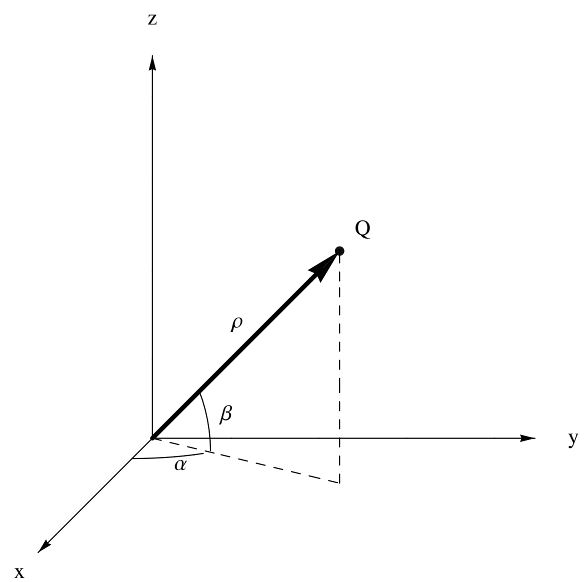
(a) ab.

(b) abu.

(c) $abu(\cos^2 v - \sin^2 v)$.

(d) $\begin{pmatrix} a\cos v & -au\sin v \\ b\sin v & bu\cos v \end{pmatrix}$.

3. Das Volumenelement der Koordinaten, welche in der untenstehenden Abbildung definiert sind, ist gegeben durch



(a) $\rho^2 \cos\beta \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

(b) $\rho \cos\alpha \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

(c) $\rho^2 \sin\beta \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

(d) $\rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

(e) $\rho \sin\beta \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

4. Die Ableitung von $\int_0^1 \frac{\sin(xt)}{x} dx$ nach t ist

(a) $\frac{\sin x}{x}$

(b) $\cos t$

(c) $\frac{\sin t}{t}$

(d) $\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{t} dt$.

5. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Die zweite Ableitung von $\int_0^x (x-s) g(s) \mathrm{d}s$ nach x ist

(a) $g(x)$

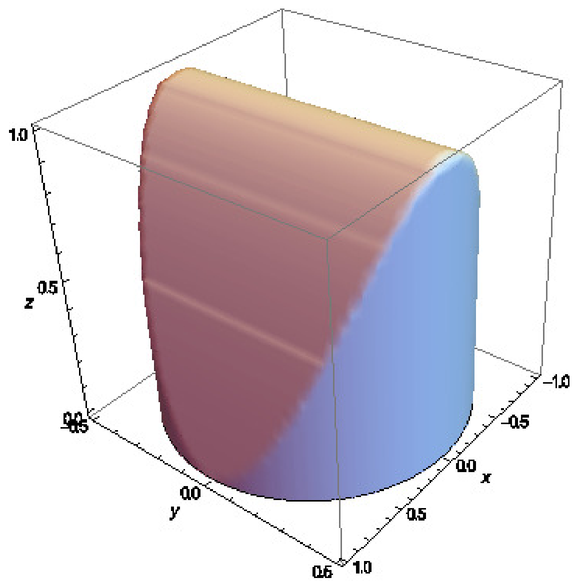
(b) $\int_0^x g(s) \mathrm{d}s$

(c) 0

(d) $g'(x) + g(x)$

Offene Aufgaben

6. Berechnen Sie das oberhalb der Ellipse $x^2 + 4y^2 \leq 1$ und unterhalb der Fläche $z = 1 - x^2$ liegende Volumen.



Hinweis: Finden Sie Koordinaten in der xy-Ebene in denen die Ellipse eine besonders einfache Form hat.

7. Berechnen Sie das Volumen des Körpers K, welcher von der Sphäre

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 19\}$$

und dem Hyperboloid

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$$

eingeschlossen wird, und oberhalb der xy-Ebene liegt.

8. Wenden Sie eine angemessene Variablentransformation an, um das Integral

$$\int\int_S e^{\frac{y-x}{y+x}} \, dx dy$$

zu berechnen, wobei S das Dreieck ist, welches durch die Gerade $x + y = 2$ und die zwei Achsen begrenzt wird.

9. Es bezeichne T die Transformation

$$T(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cosh v \\ u\sinh v \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobideterminante von T.

(b) Es sei

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4, -\frac{x}{2} \leq y \leq \frac{x}{2}, x > 0\}.$$

Skizzieren Sie und parametrisieren Sie B durch (u,v), d.h. bestimmen Sie das Urbild $\tilde{B} = T^{-1}(B)$ von B unter der Transformation T.

(c) Berechnen Sie

$$\int\int_B e^{-(x^2-y^2)} \mathrm{d}F.$$

10. (a) Berechnen Sie den Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix für die Koordinatentransformation von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten.

(b) Vergleichen Sie das Resultat aus (a) mit der Determinante der Jacobi-Matrix für die Koordinatentransformation von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten.

11. Die Funktion $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei durch

$$F(\alpha) := \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\arctan(\alpha t)}{t} \mathrm{d}t$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Ableitung von F identisch gleich Null ist, mittels

(a) Substitution.

(b) Ableitung unter dem Integral.

12. Berechnen Sie $\int_0^1 (t\ln t)^{60} \mathrm{d}t$.
Hinweis: Betrachten Sie $g(a) := \int_0^1 t^a \mathrm{d}t$ und berechnen Sie die n-te Ableitung $g^{(n)}(a)$ auf zwei verschiedene Arten.

Numerische Lösungen

6. $V = \frac{3\pi}{8}$.

7. $V = \frac{2}{3}\pi(19\sqrt{19} - 20\sqrt{10} + 1)$.

8. $e - \frac{1}{e}$.

9. (a) $\det J = u$.

(b) $\tilde{B} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 2, -\frac{\ln 2}{3} \leq v \leq \frac{\ln 2}{3}\}$.

(c) $\frac{\ln 3}{2}(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4})$.

10. (a) $\det(J) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

12. $\frac{60!}{(61)^{61}}$.