D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2021
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 18

Am Ende des Übungsblattes finden sich die numerischen Lösungen der offenen Aufgaben, so dass Sie Ihre Lösungen rechtzeitig kontrollieren können.

MC-Aufgaben

1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Der Operator $\operatorname{div}(\cdot)$ ordnet einem Vektorfeld $\vec{v}$ ein Skalarfeld $\operatorname{div}\vec{v}$ zu.

(b) Ein Vektorfeld, welches aus parallelen Vektoren besteht, hat Divergenz Null.

(c) Ein Vektorfeld, welches aus parallelen Vektoren besteht, hat Rotation Null.

(d) Der Operator $\operatorname{grad}(\cdot)$ ordnet einem Skalarfeld f ein Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ zu.

(e) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$ ist eine zulässige Bildung.

2. Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon (x,y,z) \mapsto \left(xz^{\alpha}r,\ yz^{\beta}r,\ z^2r^3\right) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Für welche Konstanten α und β ist $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$?

(a) $\alpha = 0$ und $\beta = 0$.

(b) $\alpha = 1$ und $\beta = 3$.

(c) $\alpha = 3$ und $\beta = 2$.

(d) $\alpha = 3$ und $\beta = 3$.

3. Ein Vektorfeld $\vec{v}$ heisst quellenfrei wenn $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ und wirbelfrei wenn $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ gilt. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

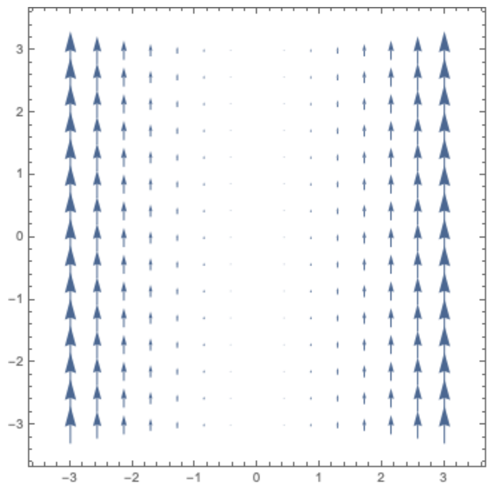
(a) Quellenfreie Vektorfelder sind auch wirbelfrei.

(b) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ sind quellenfrei.

(c) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{w}$ sind quellenfrei.

(d) Vektorfelder der Form $\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{w}$ sind wirbelfrei.

4. Welches Vektorfeld passt zu dieser Zeichnung?



(a) $\vec{v} = (y, x)$

(b) $\vec{v} = (0, x)$

(c) $\vec{v} = (0, x^2)$

(d) $\vec{v} = (x^2, 1)$

5. Die Fläche S sei einerseits durch die Parameterdarstellung $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$ und andererseits durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben. Wir betrachten einen festen Punkt P_0 mit Ortsvektor (u_0, v_0) auf der Fläche S. Dann gilt: Die Vektoren $\text{grad}(f(P_0))$ und $\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$

(a) sind gleich.

(b) sind entgegengesetzt gleich.

(c) sind parallel.

(d) stehen senkrecht aufeinander.

(e) sind weder parallel noch stehen sie senkrecht aufeinander.

6. Es sei eine Fläche durch die Parameterdarstellung $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$ gegeben. Der Vektor $\vec{n}(u, v)$ bezeichnet den Normaleneinheitsvektor zur Fläche. Es bezeichne P_0 den Punkt auf der Fläche, der zu (u_0, v_0) gehört. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Der Vektor $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ liegt in einer Tangentialebene zur Fläche im Punkte P_0.

(b) Wenn $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ und $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ linear unabhängig sind, dann spannen sie die Tangentialebene zur Fläche im Punkte P_0 auf.

(c) $\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$.

(d) Der Vektor $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ ist tangential an die u-Linie, die durch P_0 geht.

Offene Aufgaben

7. Es seien a und c Konstanten. Das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = c\left(1 - a^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, -a^2\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, 0\right)$$

beschreibt die Strömung einer idealen Flüssigkeit um einen Zylinder vom Radius a, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt (siehe dazu die Abbildung und eine animierte Visualisierung unter folgendem Link: `https://tinyurl.com/ethanalysis-laminarflow`).

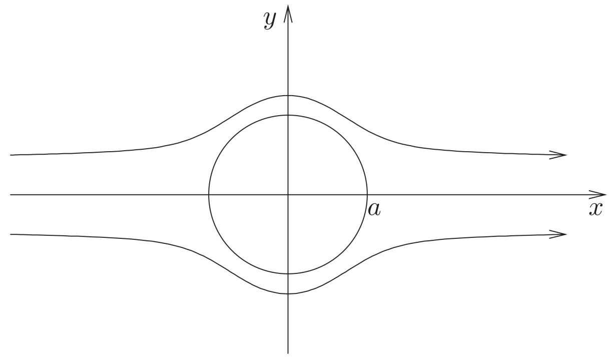
(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ und

(b) dass $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ gilt,

(c) dass an der Oberfläche des Zylinders die Strömung tangential verläuft und

(d) dass in grosser Entfernung vom Zylinder das Vektorfeld nahezu homogen ist.

(e) Bestimmen Sie weiters die Punkte maximaler und minimaler Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche.



8. Gegeben ist das zweidimensionale Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \big(x^2-y^2, 2xy\big)$. Zeigen Sie, dass die Kreise, welche die x-Achse im Ursprung berühren, Feldlinien sind und bestimmen Sie die Koordinaten der zugehörigen Kreismittelpunkte.

9. Ein ebenes Vektorfeld $K(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ wird *harmonisch* genannt, falls

$$\operatorname{div} K = P_x + Q_y = 0 \text{ und } \operatorname{rot} K = Q_x - P_y = 0.$$

Ferner bezeichne K_α das Feld, das entsteht, wenn jeder Feldvektor eines Feldes K um den Winkel α gedreht wird.

Das Feld K sei harmonisch. Zeigen Sie, dass dann auch K_α harmonisch ist.

Hinweis: Ist (x,y) ein Punkt in der Ebene, so berechnet sich der um den Winkel α gedrehte Punkt durch

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}.$$

10. Eine Gerade geht durch den Punkt $(1,0,0)$ und hat den Richtungsvektor $(0,1,1)$. Lässt man sie um die z-Achse rotieren, so erzeugt sie eine Fläche *(einschaliges Rotationshyperboloid).*

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Fläche an.

(b) Bestimmen Sie die Gleichung dieser Fläche.

(c) In welchen Punkten der Fläche ist der Normalenvektor parallel zur Richtung des Vektors $(1,1,-1)$?

(d) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks zwischen den Ebenen $z=0$ und $z=2$.

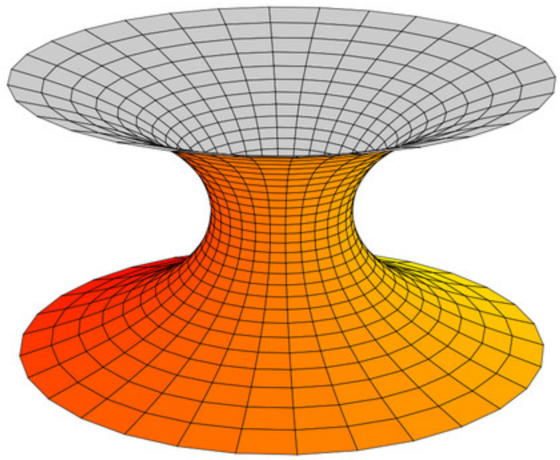
11. Eine Rotationsfläche $M \subset \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(u,\,v) = (\cosh(v)\cos(u),\, \cosh(v)\sin(u),\, v)\,,$$

mit $(u,\,v) \in [0,\,2\pi] \times [-1,\,1]$. Die Fläche M heisst Katenoid und ist eine sogenannte Minimalfläche. (Eine Minimalfläche einer Kurve ist eine Fläche, deren Rand gerade die Kurve ist und gleichzeitig unter solchen Flächen ein lokales Minimum im Flächeninhalt hat.)

(a) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt $A(M)$.

(b) Verifizieren Sie, dass der Flächeninhalt eines Zylindermantels mit Radius $\cosh 1$ und Höhe 2 grösser ist als $A(M)$.



Numerische Lösungen

10. (c) $P_1 = (1, 1, 1)$ und $P_2 = (-1, -1, -1)$.

(d) $F = 6\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \log\bigl(3 + 2\sqrt{2}\bigr)$.

11. (a) $A(M) = (2 + \sinh 2)\,\pi$.

(b) $A(\text{Zylindermantel}) = 4\pi \cosh 1$.