Serie 20

Am Ende des Übungsblattes finden sich die numerischen Lösungen der offenen Aufgaben, so dass Sie Ihre Lösungen rechtzeitig kontrollieren können.

MC-Aufgaben

1. Die Arbeit W eines Vektorfeldes $\vec{v}$ längs des Geradenstücks von $(1,0,0)$ nach $(-1,-1,-1)$ sei gleich 5. Welches Resultat erhält man, wenn man die Arbeit W' von $\vec{v}$ längs des Geradenstücks von $(-1,-1,-1)$ nach $(1,0,0)$ berechnet?

(a) Die Arbeit W' lässt sich aus den Angaben nicht berechnen.

(b) Die Arbeit W' beträgt ebenfalls 5.

(c) Die Arbeit W' beträgt -5.

2. Das Arbeitsintegral $\int_\gamma \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$ des Vektorfeldes

$$\vec{v}(x,y,z) = \left(e^{y^2}+e^{z^2},\ \ (2z+1)xe^{z^2}+(2x+1)ye^{y^2},\ \ xyze^{x^2+y^2}\right)$$

entlang des geschlossenen Weges γ, welcher aus den Seiten des Dreieckes mit den Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(-1,0,0)$ besteht und im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, beträgt:

(a) 1

(b) -1

(c) 2

3. Wie gross ist die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x,y,z) \longmapsto \left(x^2+z^2, 4y-z, 2xz+2y\right)$$

entlang des Einheitskreises γ in der (y,z)–Ebene leistet? (Der Durchlaufsinn von γ bilde mit der x–Achse eine Rechtsschraube, schaut man also entlang der positiven Richtung der x-Achse, so wird γ im Uhrzeigersinn durchlaufen.)

(a) π.

(b) 3π.

(c) $\frac{\pi}{2}$.

(d) 0.

4. Ein Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ erfülle $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$. Was folgt?

(a) Der Fluss $\int_D \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}F$ durch jede Kreisscheibe D in der xy-Ebene verschwindet.

(b) Der Fluss $\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}F$ durch jede Kugeloberfläche S verschwindet.

5. Sei $\vec{v}(x, y) = (-y, x)$ und C der Kreis mit Radius 4 und Mittelpunkt $(1, 0)$ im Gegenuhrzeigersinn orientiert. Dann gilt $\int_C \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Offene Aufgaben

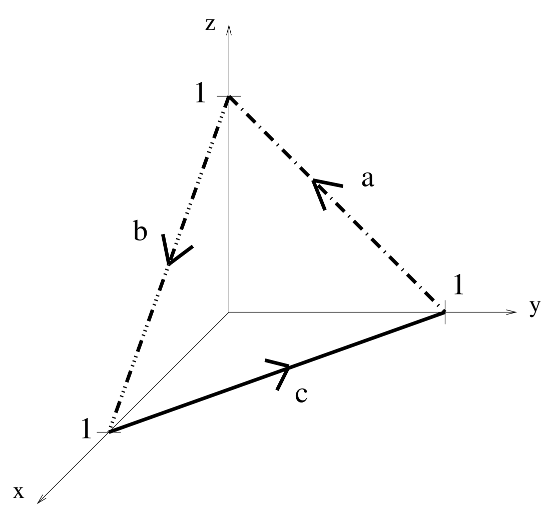
6. Es sei das Vektorfeld $\vec{v}$ durch

$$\vec{v}\colon\ (x,y,z) \mapsto \big(-x^3 - 2x + z, -y^3 - 2y + x, -z^3 - 2z + y\big)$$

und der Weg γ wie in der untenstehenden Figur definiert (er folgt zunächst a, dann b und schliesslich c). Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

(a) direkt;

(b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.

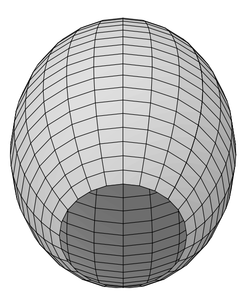


7. Ein Heissluftballon habe die Form einer Sphärenkappe (also einer Kugeloberfläche mit horizontalem Schnitt) vom Radius R und Öffnungsdurchmesser $d < 2R$, wie in der untenstehenden Figur. Das heisse Gas dringt durch die poröse Oberfläche B der Kappe mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{F}$, wobei $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, 0)$.
Berechnen Sie den Fluss $\iint_B \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A$ durch die Ballonoberfläche B

(a) direkt;

(b) mit dem Satz von Gauss;

(c) mit dem Satz von Stokes.



8. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ Konstanten mit $a \neq 0$ und $b \neq -2$. Ein zweidimensionales Kraftfeld $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist durch die Gleichung

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} cxy \\ x^6 y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Kraft wirkt auf ein Teilchen, das sich entlang der Kurve $y = ax^b$ vom Ursprung bis zum Punkt mit x-Koordinate 1 bewegt.

(a) Berechnen Sie, als Funktion von a, b und c, die Arbeit W, welche durch die Kraft $\vec{f}$ am Teilchen verrichtet wird.

(b) Welche Beziehung muss zwischen a und c gelten, damit die Arbeit W unabhängig von b ist?

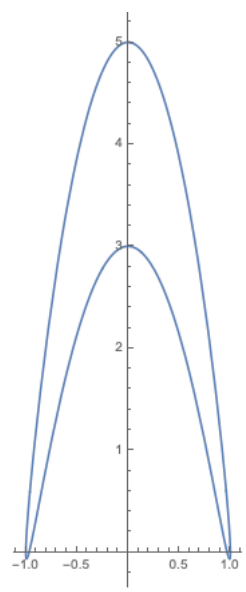
(c) Wie gross ist die Arbeit W in diesem Fall? Drücken Sie W in Abhängigkeit von c aus.

9. Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = \big(y^2 z, xyz, 2xy^2\big)$.
Vom Nullpunkt des Koordinatensystems aus ist auf einem geradlinigen Weg W die Oberfläche der Einheitskugel zu erreichen. Finden Sie alle Endpunkte des Wegs, so dass die Arbeit entlang W maximal ist.

10. Die Randkurve ∂B des Bumerangs B (siehe die Zeichnung unten) kann durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ 4\cos^2 t + \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametrisiert werden. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Green den Schwerpunkt von B.



Numerische Lösungen

6. $\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{3}{2}$.

7. $\Phi = \frac{\pi}{2} d^2$.

8. (a) $W = \frac{3ac + a^3 b}{3(b+2)}$.

(b) $a = \sqrt{3c/2}$.

(c) $W = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{3c}{2}}$.

9.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit maximaler Arbeit} \quad A = \frac{1}{8} \, .$$

10. $(x_S, y_S) = (0, 3)$.