D-MAVT/D-MATL Analysis II FS 2021
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 21

Am Ende des Übungsblattes finden sich die numerischen Lösungen der offenen Aufgaben, so dass Sie Ihre Lösungen rechtzeitig kontrollieren können.

MC-Aufgaben

1. Sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld auf $D \subset \mathbb{R}^3$, sodass

$$\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$$

für alle geschlossene Wege W in D. Was folgt?

(a) Die Arbeit $\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r}$ hängt nur von Anfangs- und Endpunkt von W ab.

(b) $\operatorname{rot} \vec{v} = (0,0,0)$

(c) $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

(d) $\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$ für alle Wege W.

(e) Es existiert eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, sodass $\vec{v} = \operatorname{grad} f$.

2. Für welche a ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x,y,z) \longmapsto \left(\ln\left(1+x^2\right) + ay^2, xy + y^2, z^3\right)$$

von der Form $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ für eine gewisse Funktion $f = f(x,y,z)$ (die man nicht zu bestimmen braucht)?

(a) $a = 0$.

(b) $a = -1/2$.

(c) $a = 1/2$.

(d) $a = 1/2$ und $a = -1/2$.

(e) Es gibt kein solches a, da der Definitionsbereich von $\vec{v}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

3. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind einfach zusammenhängend?

(a) Hohlkugel $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

(b) Gefüllter Torus

(c) $\mathbb{R}^3 \setminus x-$Achse

(d) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1,2,3)\}$

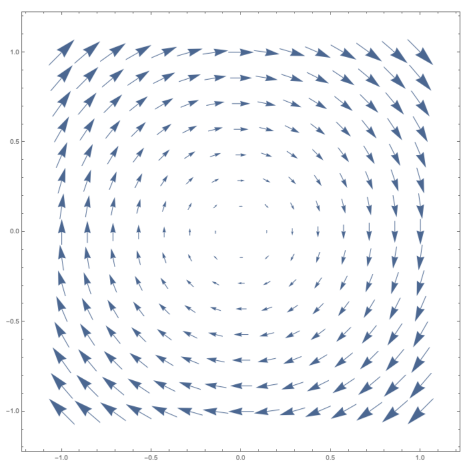
(e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \geq 1\}$

4. Es seien a,b,c,d,e,f reelle Zahlen. Das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = (ay+bz, cx+dz, ex+fy)$ ist konservativ, falls $a=c, b=d$ und $e=f$ gilt.

(a) Wahr

(b) Flasch

5. Handelt es sich bei der Abbildung um ein konservatives Vektorfeld?



(a) Ja

(b) Nein

Offene Aufgaben

6. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(2xy + 3, x^2 - 4z, -4y\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ konservativ ist.

(b) Finden Sie eine Funktion f, so dass $\vec{v} = \operatorname{grad} f$.

(c) Berechnen Sie

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

wobei C ein beliebiger Weg ist, der die Punkte $(3, -1, 2)$ und $(2, 1, -1)$ verbindet.

7. Bestimmen Sie das Potential f des Coulombfelds

$$\vec{v}(\vec{r}) = -C \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

auf dem Gebiet $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

8. Wir betrachten das wirbelfreie Vektorfeld (Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters, vgl. Kap. VI, S. 14)

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)$$

aber jetzt nur im Halbraum $x > 0$. Dieser Definitionsbereich ist einfach zusammenhängend. Also besitzt $\vec{v}$ darin ein Potential f.

(a) Berechnen Sie f durch Bestimmung der Arbeit von $\vec{v}$ vom Punkt $(1, 0, 0)$ zum Punkt (x, y, z) längs eines geeigneten Weges.

(b) Verifizieren Sie, dass $\operatorname{grad} f = \vec{v}$ ist.

9. (a) Berechnen Sie das Potential des Kraftfeldes $(x + z^2, yz, \frac{y^2}{2} + 2xz)$. Wie gross ist die verrichtete Arbeit, wenn man vom Punkt $(1, 0, 0)$ nach $(2, 1, 3)$ geht?

(b) Gegeben sei das Kraftfeld $(x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$. Berechnen Sie die Arbeit, wenn man sich entlang der spiralförmigen Kurve $(t\cos(t), t\sin(t), t)$ für $0 \leq t \leq R$ bewegt.

(c) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(5005x^{1000}y^3z, 15x^{1001}y^2z + 2y, 5x^{1001}y^3\right).$$

Berechnen Sie die Arbeit A von $\vec{v}$ entlang der Strecke von $P = (1, 0, 1)$ nach $Q = (0, 1, 1)$.

Numerische Lösungen

6. (b) $f(x, y, z) = x^2y + 3x - 4yz + K$

(c) $\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = 6$

7. $f(\vec{r}) = \frac{C}{|\vec{r}|}$

8. (a) $f(x, y, z) = \arctan \frac{y}{x}$

9. (a) $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xz^2 + \frac{1}{2}y^2z,\ A = R^2.$

(b) $A = 21.$

(c) $A = 1.$