D-MAVT/D-MATL
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 22

Am Ende des Übungsblattes finden sich die numerischen Lösungen der offenen Aufgaben, so dass Sie Ihre Lösungen rechtzeitig kontrollieren können.

MC-Aufgaben

1. Welche Ordnung hat die Differentialgleichung $y'' - x^2 y' + y^4 = 0$?

(a) -1

(b) 0

(c) 1

(d) 2

(e) 4

2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Die Differenzialgleichung $y' = -\frac{y}{x} + 1$

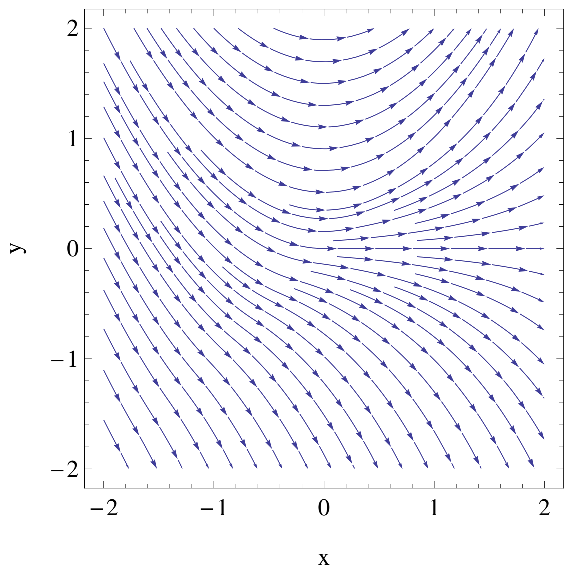
(a) besitzt die Funktion $y : x \to \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ als Lösung;

(b) besitzt die Funktion $y : x \to \frac{x}{2}$ als Lösung;

(c) besitzt unendlich viele Lösungen;

(d) besitzt genau zwei Lösungen.

3. Welche der folgenden Differentialgleichungen hat das gegebene Richtungsfeld?



(a) $y' = x + y$

(b) $y' = x - y$

(c) $y' = \min\{x, y\}$

(d) $y' = \max\{x, y\}$

(e) $y' = |y| - |x|$

4. Die Substitution

$$y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

in der Differenzialgleichung

$$x^2y + 2xy' + y'' = -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

liefert...

(a) $x^2g + 2xg' + g'' = -2\cos x$

(b) $-x^2g + 2xg' + g'' = -2\cos x$

(c) $g'' - g = -2\cos x$

(d) $g'' - xg' = -2\cos x$

5. Betrachten Sie die Tangente an den Graphen der Funktion $x \mapsto y(x)$ im Punkt $(x, y(x))$. Wie lautet die Differenzialgleichung dafür, dass diese Tangente die x-Achse im vorgegebenen Abstand c vom Punkt $(x, 0)$ schneidet?

(a) $x - \frac{y}{y'} = c$

(b) $\frac{y}{y'} = c$

(c) $yy' = c$

(d) $\left|\frac{y}{y'}\right| = c$

Offene Aufgaben

6. Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme (alle diese Differenzialgleichungen sind separierbar):

(a) $\left(x^2+3\right) y' + 2xy = x$,
mit $y(0) = 1$.

(b) $y' = xe^{x+y}$, mit $y(1) = -1$.

(c) $y' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}$, mit $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

(d) $yy' = xy^2 + 2x$, mit $y(-1) = -1$. Existenzintervall?

(e) $y' = \alpha\sqrt{y} - \beta y$, mit $y(0) = 0$.

(f) $\left(x^2+x-6\right) y' = \frac{5}{2y}$, mit $x > 5$ und $\lim_{x\to\infty} y(x) = -1$.

7. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'x^2 = -xy - x^2 - y^2.$$

Finden Sie die Lösung, die durch die Anfangsbedingung $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ gegeben ist, und bestimmen Sie deren Nullstellen.

Hinweis: Substitution!

8. Finden Sie die Lösung $t \mapsto x(t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\dot{x}^2 + 1$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$, und diskutieren Sie das Verhalten der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ für $t \to \infty$.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst $v(t) = \dot{x}(t)$.

9. Finden Sie alle Kurven, gegeben durch $y = y(x)$, welche die folgende Bedingung erfüllen: Es sei t die Tangente im Punkt P der Kurve und Q ihr Schnittpunkt mit der y–Achse. Dann liegt der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ auf der Geraden, gegeben durch $y = x$.

Numerische Lösungen

6. (a) $y(x) = \frac{3}{2(x^2+3)} + \frac{1}{2}$

(b) $y(x) = \ln\left(\frac{1}{e^x(1-x)+e}\right)$

(c) $y(x) = \arctan(-\cot x)$

(d) $y(x) = -\sqrt{3e^{x^2-1} - 2}$

(e) $y(x) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - e^{-\frac{\beta x}{2}}\right)^2$.

(f) $y(x) = -\sqrt{\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + 1}$.

7. $y = x\,\frac{1-2\ln|x|}{1+2\ln|x|} = x\,\frac{1-\ln(x^2)}{1+\ln(x^2)}$, Nullstelle in Def. Bereich der Lösungskurve: $x = e^{1/2}$.

8. $x(t) = t + \ln\left(\frac{1+e^{-2t}}{2}\right)$

9. $y(x) = Kx^2 + x$, $K \in \mathbb{R}$