Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 23

Am Ende des Übungsblattes finden sich die numerischen Lösungen der offenen Aufgaben, so dass Sie Ihre Lösungen rechtzeitig kontrollieren können.

MC-Aufgaben

1. Gegeben ist eine lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung, welche $y : x \mapsto \sin x$ als Lösung besitzt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $x \mapsto \cos x$ ist ebenfalls eine Lösung.

(b) $x \mapsto \sin(2x)$ ist ebenfalls eine Lösung.

(c) $x \mapsto 2\sin(x)$ ist ebenfalls eine Lösung.

(d) $x \mapsto \sin(x) + 2x$ ist ebenfalls eine Lösung.

2. Welche der folgenden Aussagen stimmen?

(a) Jede separierbare Differentialgleichung ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

(b) Jede lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

(c) Jede homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

3. Die Differentialgleichung

$$y' = x^2 + 2xy + y^2$$

(a) ist linear.

(b) ist separierbar.

(c) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

(d) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

4. Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{x^2} y + \sin x$$

(a) ist linear.

(b) ist separierbar.

(c) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

(d) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

5. Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} + \sin \frac{y}{x}$$

(a) ist linear.

(b) ist separierbar.

(c) lässt sich durch eine Substitution $u = \frac{y}{x}$ lösen.

(d) lässt sich durch eine Substitution $u = x + y$ lösen.

6. Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei das Potential eines Vektorfelds $\vec{v} = \operatorname{grad} g$. In welcher Beziehung stehen die Niveaulinien von g mit den Feldlinien von $\vec{v}$?

(a) Die Niveaulinien von g und die Feldlinien von $\vec{v}$ sind (abgesehen von der Orientierung) gleich.

(b) Die Niveaulinen von g und die Feldlinien von $\vec{v}$ sind Orthogonaltrajektorien voneinander.

(c) Es gibt keinen Zusammenhang dieser Art.

Offene Aufgaben

7. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

(a)
$$\begin{cases} y' - 3y = e^{2x}, & x \in (-\infty, \infty) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} xy' - 2y = x^5, & x \in (0, \infty) \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

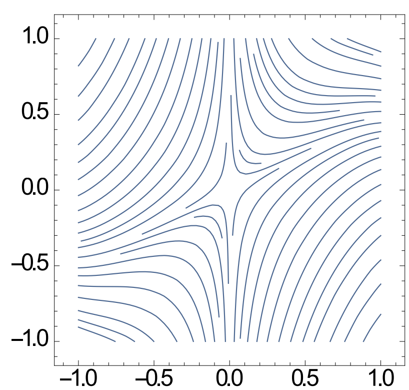
(c)
$$\begin{cases} y' + y \tan x = \sin 2x, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 4xy = (1+x^2)^{-2}, & x \in (-\infty, \infty) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

8. Lösen Sie Differentialgleichung
$$1 - x^2 + y^2 = 2xyy'$$
mit Hilfe der Substitution $u(x) = (y(x))^2$.

9. Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y' = -\frac{y}{x} + \cos\left(x^2\right).$$

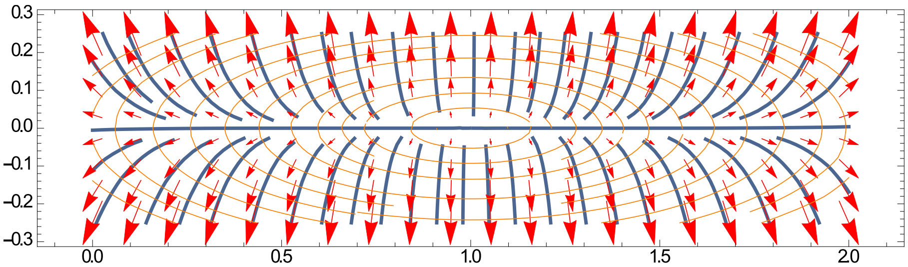
Die Lösungskurven sehen Sie unten.



10. (a) Bestimmen Sie ein ebenes Vektorfeld $\vec{v}$, welches in jedem Punkt in $\mathbb{R}^2$ eine Ellipse der durch $c > 0$ parametrisierten Schar

$$(x-1)^2 + 9y^2 = c$$

senkrecht schneidet.



(b) Bestimmen Sie die Feldlinien des in (a) gefundenen Vektorfeldes $\vec{v}$.

11. Wir betrachten eine Differentialgleichung der Form

$$y' + cy = g(x),$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $g(x)$ ist eine Linearkombination von Produkten von Polynom-, Exponential-Kosinus- und Sinusfunktionen.
Eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung kann mit Hilfe eines Ansatzes auf der folgenden Tabelle gefunden werden.

Enthält $g(x)$ einen Term der Form...	und ist...	so fügen wir die folgende y_p als Lösungsansatz ein:
$P_n(x)$	$c \neq 0$	$y_p = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$
	$c = 0$	$y_p = x(A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n)$
$e^{\alpha x}$	$c \neq -\alpha$	$y_p = A e^{\alpha x}$
	$c = -\alpha$	$y_p = A x e^{\alpha x}$
$k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)$	$\beta \neq 0$	$y_p = A_1 \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x)$
$P_n(x) e^{\alpha x}$	$c \neq -\alpha$	$y_p = (A_0 + \ldots + A_n x^n) e^{\alpha x}$
	$c = -\alpha$	$y_p = x(A_0 + \ldots + A_n x^n) e^{\alpha x}$
$P_n(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q_n(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$	$\beta \neq 0$	$y_p = (A_0 + \ldots + A_n x^n) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + (B_0 + \ldots + B_n x^n) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

In der Tabelle bezeichnen $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ Polynomfunktionen n-ten Grades.

Ziel dieser Aufgabe ist die folgende Differentialgleichung

$$y' - 2y = e^x + e^{2x} - e^{2x} \sin(3x),$$

zu lösen.

(a) Lösen Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung.

(b) Benutzten Sie die obige Tabelle um eine partikuläre Lösung zu bestimmen.
Hinweis: Für jeden Term der Störfunktion (nämlich e^x , e^{2x} und $e^{2x}\sin(3x)$) nehmen Sie einen Ansatzteil und bezeichnen die zu bestimmenden Koeffizienten mit verschiedenen Buchstaben. Setzen Sie den ganzen Ansatz in die DGL ein und bestimmen die Koeffizienten mittels eines Koeffizientenvergleichs.

(c) Benutzen Sie das Superpositionsprinz, um die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu bestimmen.

Numerische Lösungen

7. (a) $y = e^{3x} - e^{2x}$.

(b) $y = \frac{2x^2+x^5}{3}$.

(c) $y = 4\cos x - 2\cos^2 x$.

(d) $y = \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}$.

8. $y\left(x\right)^2 = u(x) = Kx - 1 - x^2$.

9. $y(x) = \frac{K}{x} + \frac{\sin\left(x^2\right)}{2x}$.

10. (a) $\vec{v} = \left(2(x-1),\, 18y\right)$.

(b) $y = C \cdot (x-1)^9$.

11. (a) $y_h(x) = Ke^{2x}$.

(b) $y_p(x) = -e^x + xe^{2x} + \frac{1}{3}e^{2x}\cos(3x)$.

(c) $y(x) = Ke^{2x} - e^x + xe^{2x} + \frac{1}{3}e^{2x}\cos(3x)$.