Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 24

Am Ende des Übungsblattes finden sich die numerischen Lösungen der offenen Aufgaben, so dass Sie Ihre Lösungen rechtzeitig kontrollieren können.

MC-Aufgaben

1. Gegeben seien Funktionen s, $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Welche aus den folgenden Bedingungen garantieren die Exaktheit der Differenzialgleichung $s(x, y) = t(x, y) \cdot y'$?

(a) Für alle (x, y): $s_y(x, y) = t_x(x, y)$.

(b) Für alle (x, y): $s_x(x, y) = t_y(x, y)$.

(c) Für alle (x, y): $s_y(x, y) = -t_x(x, y)$.

(d) Für alle (x, y): $s_x(x, y) = -\frac{1}{t_y(x,y)}$.

(e) Keine.

2. Welche aus den folgenden Gleichungen sind exakt?

(a) $e^x \sin y + 3y - (3x - e^x \sin y)y' = 0$.

(b) $\left(\frac{y}{x} + 6x\right) + (\log x - 2)y' = 0$, $x > 0$.

(c) $(y \log x + xy)y' = -x \log y - xy$.

(d) $y' = -\frac{ax+by}{bx+cy}$, $a, b, c, d > 0$ Konstante.

3. Welche Aussagen über die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$x^2 + Cy^2 = 1$$

mit Scharparameter C sind korrekt?

(a) Die y–Achse ist eine Orthogonaltrajektorie.

(b) Alle Orthogonaltrajektorien, welche den Punkt $(0, 0)$ nicht treffen, sind geschlossene Kurven.

(c) Die Kurven der Form $y^2 + x^2 - \ln |x| = K$ mit $K \geq 1$ sind Orthogonaltrajektorien.

(d) Die Kurven der Form $y^2 + x^2 - \ln(x^2) = K$ mit $K \geq 1$ sind Orthogonaltrajektorien.

4. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ sind korrekt?

(a) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -3$.

(b) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

(c) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

(d) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$.

Offene Aufgaben

5. Bestimmen Sie die Gleichung der durch den Punkt $(1, 1)$ gehenden Lösungskurve der Differentialgleichung

$$(y^2 - 3x^2) + 2xyy' = 0.$$

Hinweis: Exakte Differentialgleichung.

6. Bestimmen Sie die Kurvenschar der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y^2 \cdot (y')^2 + y^2 - 1 = 0, \quad y = y(x) > 0$$

sowie ihre Enveloppen.

7. Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$\frac{y-1}{x-1} = C.$$

Skizzieren Sie diese Trajektorien.

8. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y - xy' = \sqrt{(y')^2 + 1}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine und die singuläre Lösung. Welche geometrische Form hat die Enveloppe der Lösungsschar?

9. Betrachten Sie die 3-parametrige Kurvenschar

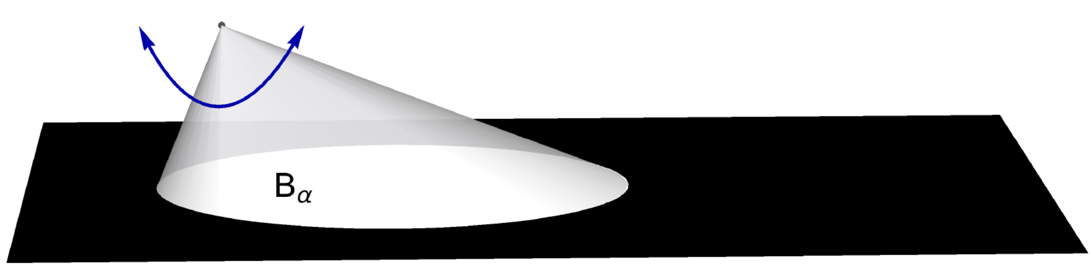
$$y(x) = C_1 \cosh(C_3 x) + C_2 \sinh(C_3 x)$$

mit den Parametern $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine zugehörige Differentialgleichung.

10. Ein schwenkbarer Lichtkegel im Raum beleuchtet in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ den Bereich

$$B_\alpha = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot \sin\alpha + \cos\alpha \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 1}{2}} \right\}$$

in der (x, y)-Ebene.



(a) Bestimmen Sie für $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ jeweils die Gleichung der Randkurve ∂B_α von B_α in möglichst einfacher Form. Um was für eine Kurve handelt es sich jeweils? Skizzieren Sie die drei Kurven in der (x, y)-Ebene.
Hinweis: Im Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist auf das Vorzeichen von x zu achten.

(b) Bestimmen Sie die Begrenzung des beleuchtbaren Bereichs, d.h. die Gleichung der Enveloppe der Kurvenschar ∂B_α.

Numerische Lösungen

5. $y = x$.

6. $y = \sqrt{1-(x-K)^2}, \quad K \in \mathbb{R}$, Enveloppe: $y = 1$.

7. $(y-1)^2 + (x-1)^2 = C$.

8. $y(x) = Cx + \sqrt{C^2+1}$, singuläre Lösung: $y(x) = \sqrt{1-x^2}$.

9. $y'y'' - y'''y = 0$.

10. (a) $\partial B_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $\partial B_{\frac{\pi}{4}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 2x\}$, $\partial B_{\frac{\pi}{2}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2 + 1,\ x > 0\}$

(b) $y^2 - x^2 = 1$.