D-MAVT/D-MATL — Analysis II — FS 2021
Prof. Dr. Ana Cannas
Prof. Dr. Urs Lang

Serie 25

Am Ende des Übungsblattes finden sich die numerischen Lösungen der offenen Aufgaben, so dass Sie Ihre Lösungen rechtzeitig kontrollieren können.

MC-Aufgaben

1. Wie lautet die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung $y''' + 2y' + y = 0$?

(a) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$

(b) $\lambda^3 + 2\lambda = 0$

(c) $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

(d) $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

2. Was kann man über eine Differentialgleichung der Form $y'' + ay' + by = e^x$ mit konstanten Koeffizienten a und b immer sagen?

(a) Ihre Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 2.

(b) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt αe^x für eine Konstante α.

(c) Ihre allgemeine Lösung lautet $y_h(x) + \alpha e^x$, wobei y_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist und α eine Konstante ist.

(d) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, e^x$ für Konstanten $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

3. Die allgemeine Lösung der Euler'schen Differentialgleichung

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

ist gleich...

(a) $y(x) = C_1x + C_2x\ln x + C_3x(\ln x)^2$

(b) $y(x) = C_1x + C_2x^2$

(c) $y(x) = C_1x\ln x + C_2(\ln x)^2$

(d) $y(x) = C_1x + C_2x\ln x$

4. Das Indexpolynom einer (homogenen) Eulerschen Differentialgleichung der Ordnung 4 hat die doppelte komplexe Nullstelle $\alpha = \pm i$. Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

(a) $C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)$

(b) $C_1\cos(x) + C_2x\cos(x) + C_3\sin(x) + C_4x\sin(x)$

(c) $C_1 + C_2\cos(\ln x) + C_3(\ln x)\cos(\ln x) + C_4\sin(\ln x) + C_5(\ln x)\sin(\ln x)$

(d) $C_1\cos(\ln x) + C_2(\ln x)\cos(\ln x) + C_3\sin(\ln x) + C_4(\ln x)\sin(\ln x)$

(e) $C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x) + C_3$

Offene Aufgaben

5. Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$.

6. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y''' + y'' + y' + y + x + 1 = 0$ mit $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

7. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - (2\alpha - 4)y' + (8 - 4\alpha)y = 0.$$

(a) Für welche Werte von α gibt es sowohl Lösungen, die für $x \to \infty$ konvergieren (aber ungleich der konstanten Funktion 0 sind) als auch Lösungen, die für $x \to \infty$ nicht konvergieren?

(b) Für welche α gibt es Lösungen y, die für $x \to \infty$ konvergieren mit $\lim_{x\to\infty} y(x) \neq 0$?

8. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = 1, \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

für die Funktion $y = y(x)$, $x > 0$.

Hinweis: Für die partikuläre Lösung können Sie den Ansatz $y_p(x) = A + Bx + Cx^2$ wählen.

9. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + (\lambda - 4)\, y' + \frac{1}{2}\,\lambda\, y = 0\,.$$

Für welche Werte des reellen Parameters λ gibt es eine von Null verschiedene Lösung $y(x)$, die für $x \to \infty$ beschränkt bleibt?

10. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$r^2 u''(r) = -ru'(r) + u(r) + 2r, \quad \text{wobei} \quad r > 0.$$

(a) Finden Sie die Lösung $u(r)$ mit $u(1) = 0$ und $u'(1) = 0$.

(b) Finden Sie all diejenigen Lösungen $u(r)$, welche für $r \to 0$ konvergieren.

11. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 3x$$

und zeigen Sie, dass sie nur eine auf der ganzen reellen Achse definierte Lösung hat.

12. Eine Lösungskurve $y = u(x)$ der Differentialgleichung $y'' - 3y' - 4y = 0$ schneidet eine Lösungskurve $y = w(x)$ der Gleichung $y'' + 4y' - 5y = 0$ im Ursprung. An dieser Stelle haben beide Kurven die selbe Steigung. Bestimmen Sie die Funktionen u und w, wenn ausserdem die Bedingung

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w(x)^4}{u(x)} = \frac{5}{6}$$

erfüllt wird.

Numerische Lösungen

5. $y(x) = (c_1 + xc_2 + 2x^2)e^{-x}$.

6. $y(x) = e^{-x} + 3\sin x - x$.

7. (a) $\alpha \geq 2$.

(b) $\alpha = 2$.

8. $y(x) = x^2 - x - x\ln x$..

9. $\lambda \in (-\infty,\, 0] \cup [4, \infty)$.

10. (a) $u(r) = \ln(r)r - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2r}$.

(b) $u(r) = C_1 r + \ln(r)r \quad \text{mit } C_1 \in \mathbb{R}$.

11. $y(x) = \frac{x}{2}$.

12. $u(x) = \frac{6}{5}\left(e^{4x} - e^{-x}\right); \quad w(x) = e^{x} - e^{-5x}$.