

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lernkontrolle 1

Uploade deine Lösung nach 45 Minuten Bearbeitungszeit bis spätestens um 14:15 auf Moodle hoch: <https://moodle-app2.let.ethz.ch/mod/assign/view.php?id=570880>

Mehr Details sind auf der Kurswebseite: <https://metaphor.ethz.ch/x/2021/fs/401-0604-00L/#Lernkontrolle>

Aufgabe 1.1 Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0, \\ \frac{1}{3}, & \text{falls } 0 \leq a < 2 \\ \frac{a}{4}, & \text{falls } 2 \leq a < 3 \\ \frac{5}{6}, & \text{falls } 3 \leq a < 6 \\ 1 - \frac{1}{10}e^{-(a-6)}, & \text{falls } a \geq 6. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, C, D und E :

- (i) $A = \{X \leq 1\}$
- (ii) $B = \{X > 2\}$
- (iii) $C = \{2 \leq X < \frac{8}{3}\}$
- (iv) $D = \{4 < X \leq 5\}$
- (v) $E = \{X = 6\}$

(b) Welche Aussagen sind für die obigen Ereignisse wahr? Begründe deine Antworten.

- (i) A und B sind unabhängig.
- (ii) B und C sind unabhängig.
- (iii) C und D sind unabhängig.

Aufgabe 1.2 Wir nehmen an, dass eine zufällig ausgewählte Person mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}[V] = \frac{1}{3}$ mit einem Virus infiziert ist. Wir definieren die Ereignisse

- $V := \{\text{Die Person ist mit dem Virus infiziert}\}$
- $T := \{\text{Das Resultat des Tests ist positiv}\}.$

Weiters nehmen wir an, dass ein Test mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ positiv ausfällt, falls die Person tatsächlich mit dem Virus infiziert ist. Man stellt auch fest, dass die Wahrscheinlichkeit für ein falsches positives Ergebnis $\frac{3}{10}$ beträgt, falls die Person nicht mit dem Virus infiziert ist.¹

- (a) Gib für zwei beliebige Ereignisse A, B die allgemeine Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A|B]$.
- (b) Berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $C = T \cap V$, dass eine Person mit dem Virus infiziert ist und der Test positiv ausfällt.
- (c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Testergebnis positiv ist.

¹Die Zahlen sind so gewählt, dass einfache Zahlen herauskommen. Die Zahlen sind nicht realistisch für Covid.

- (d) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit dem Virus infiziert ist, wenn der Test positiv ausfällt.
- (e) Sind V und T unabhängig? Begründe deine Antwort.
- (f) Definiere einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und die Ereignisse $V, T \in \mathcal{F}$ aus der Angabe.

Hinweis: Berechne die Wahrscheinlichkeiten der paarweise disjunkten Ereignisse $V^c \cap T^c \in \mathcal{F}$, $V^c \cap T \in \mathcal{F}$, $V \cap T^c \in \mathcal{F}$ und $V \cap T \in \mathcal{F}$ bevor du $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definierst. Beachte, dass jedes dieser Ereignisse jeweils mindestens ein Element aus Ω enthalten muss, weil keines dieser Ereignisse Wahrscheinlichkeit null hat. Probiere Ω möglichst klein zu wählen. Beachte, dass $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ die definierenden Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsraumes erfüllen muss und dass $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alle in der Angabe geforderten Eigenschaften erfüllen muss (z.B. $\mathbb{P}[T|V] = \frac{4}{5}$). In dieser Aufgabe ist kein Beweis verlangt, aber der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ soll in exakter mathematischer Notation korrekt aufgeschrieben werden.

- (i) Wie viele Elemente hat Ω ?
- (ii) Wie viele Elemente hat \mathcal{F} ?