

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lernkontrolle 2

Uploade deine Lösung nach 45 Minuten Bearbeitungszeit bis spätestens um 14:15 auf Moodle hoch: <https://moodle-app2.let.ethz.ch/mod/assign/view.php?id=593957>

Mehr Details sind auf der Kurswebseite: <https://metaphor.ethz.ch/x/2021/fs/401-0604-00L/#Lernkontrolle>

Aufgabe 2.1 Betrachte die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy, & 1 \leq x \leq 3 \text{ und } 1 \leq y \leq 3, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Berechne die Normalisierungs-Konstante c .
- (b) Sind X und Y unabhängig? Warum? Sind X, Y i.i.d.? Warum?
- (c) Berechne $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[XY]$ und $\mathbb{E}[X^2]$.
- (d) Berechne die Varianz und die Standardabweichung von X .
- (e) Berechne $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X}\right]$ und $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X} + Y\right]$.
- (f) Berechne die Dichte $f_{\frac{1}{X}}$ von $\frac{1}{X}$.

Aufgabe 2.2 Seien X_1, \dots, X_n i.i.d. $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ -normalverteilte Zufallsvariablen mit $m = 1.85$ und $\sigma = 0.14$.

- (a) Was ist der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von X_i ? (Die Ergebnisse können direkt ohne Beweis angegeben werden.)
- (b) Welcher Verteilung folgt der Stichprobenmittelwert $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$?
- (c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Stichprobenmittelwert $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ kleiner als 1.76 ist, wobei du die Lösung mithilfe von Φ ausdrücken kannst. Du kannst also $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ verwenden ohne das Integral explizit auszurechnen.