Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lösungen Lernkontrolle 1

Uploade deine Lösung nach 45 Minuten Bearbeitungszeit bis spätestens um 14:15 auf Moodle hoch: https://moodle-app2.let.ethz.ch/mod/assign/view.php?id=570880

Mehr Details sind auf der Kurswebseite: https://metaphor.ethz.ch/x/2021/fs/401-0604-00L/#Lernkontrolle

Aufgabe 1.1 Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0, \\ \frac{1}{3}, & \text{falls } 0 \leq a < 2 \\ \frac{a}{4}, & \text{falls } 2 \leq a < 3 \\ \frac{5}{6}, & \text{falls } 3 \leq a < 6 \\ 1 - \frac{1}{10}e^{-(a-6)}, & \text{falls } a \geq 6. \end{cases}$$

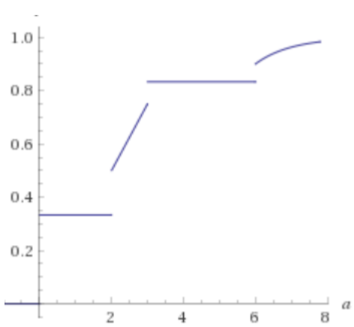
(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, C, D und E:

(i) $A = \{X \leq 1\}$
(ii) $B = \{X > 2\}$
(iii) $C = \{2 \leq X < \frac{8}{3}\}$
(iv) $D = \{4 < X \leq 5\}$
(v) $E = \{X = 6\}$

(b) Welche Aussagen sind für die obigen Ereignisse wahr? Begründe deine Antworten.

(i) A und B sind unabhängig.
(ii) B und C sind unabhängig.
(iii) C und D sind unabhängig.

Lösung 1.1
Der Graph von F_X sieht folgendermassen aus



(a) (i) $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[\{X \leq 1\}] = F_X(1) = \frac{1}{3}$
(ii) $\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[\{X > 2\}] = 1 - \mathbb{P}[\{X \leq 2\}] = 1 - F_X(2) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
(iii) $\mathbb{P}[C] = \mathbb{P}\left[\{2 \leq X < \frac{8}{3}\}\right] = F_X(\frac{8}{3}-) - F_X(2-) = \frac{8}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

(iv) $\mathbb{P}[D] = \mathbb{P}[\{4 < X \leq 5\}] = F_X(5) - F_X(4) = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0$

(v) $\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[\{X = 6\}] = F_X(6) - F_X(6-) = \frac{9}{10} - \frac{5}{6} = \frac{1}{15}$

(b) (i) Die Aussage ist falsch.

$$A \cap B = \{X \leq 1\} \cap \{X > 2\} = \varnothing.$$

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[\varnothing] = 0 \neq \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]\,.$$

A und B sind nicht unabhängig.

(ii) Die Aussage ist wahr.

$$B \cap C = \{X > 2\} \cap \{2 \leq X < \frac{8}{3}\} = \{2 < X < \frac{8}{3}\}.$$

$$\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}\left[\{2 < X < \frac{8}{3}\}\right] = F_X(\frac{8}{3}-) - F_X(2) = \frac{8}{12} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[C]\,.$$

B und C sind unabhängig.

(iii) Die Aussage ist wahr.

$$C \cap D = \{2 \leq X < \frac{8}{3}\} \cap \{4 < X \leq 5\} = \varnothing.$$

$$\mathbb{P}[C \cap D] = \mathbb{P}[\varnothing] = 0 = \frac{1}{3}0 = \mathbb{P}[C]\,\mathbb{P}[D]\,.$$

C und D sind unabhängig.

Aufgabe 1.2 Wir nehmen an, dass eine zufällig ausgewählte Person mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}[V] = \frac{1}{3}$ mit einem Virus infiziert ist. Wir definieren die Ereignisse

- V :={Die Person ist mit dem Virus infiziert}
- T :={Das Resultat des Tests ist positiv}.

Weiters nehmen wir an, dass ein Test mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ positiv ausfällt, falls die Person tatsächlich mit dem Virus infiziert ist. Man stellt auch fest, dass die Wahrscheinlichkeit für ein falsches positives Ergebnis $\frac{3}{10}$ beträgt, falls die Person nicht mit dem Virus infiziert ist.[1]

(a) Gib für zwei beliebige Ereignisse A, B die allgemeine Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A|B]$.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $C = T \cap V$, dass eine Person mit dem Virus infiziert ist und der Test positiv ausfällt.

(c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Testergebnis positiv ist.

(d) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit dem Virus infiziert ist, wenn der Test positiv ausfällt.

(e) Sind V und T unabhängig? Begründe deine Antwort.

[1] Die Zahlen sind so gewählt, dass einfache Zahlen herauskommen. Die Zahlen sind nicht realistisch für Covid.

(f) Definiere einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und die Ereignisse $V, T \in \mathcal{F}$ aus der Angabe.

Hinweis: Berechne die Wahrscheinlichkeiten der paarweise disjunkten Ereignisse $V^c \cap T^c \in \mathcal{F}$, $V^c \cap T \in \mathcal{F}$, $V \cap T^c \in \mathcal{F}$ und $V \cap T \in \mathcal{F}$ bevor du $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definierst. Beachte, dass jedes dieser Ereignisse jeweils mindestens ein Element aus Ω enthalten muss, weil keines dieser Ereignisse Wahrscheinlichkeit null hat. Probiere Ω möglichst klein zu wählen. Beachte, dass $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ die definierenden Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsraumes erfüllen muss und dass $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alle in der Angabe geforderten Eigenschaften erfüllen muss (z.B. $\mathbb{P}[T|V] = \frac{4}{5}$). In dieser Aufgabe ist kein Beweis verlangt, aber der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ soll in exakter mathematischer Notation korrekt aufgeschrieben werden.

(i) Wie viele Elemente hat Ω?

(ii) Wie viele Elemente hat $\mathcal{F}$?

Lösung 1.2

(a) For $\mathbb{P}[B] \neq 0$ the conditional probability is defined as

$$\mathbb{P}[A|B] := \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}.$$

For $\mathbb{P}[B] = 0$, $\mathbb{P}[A|B]$ is in general not defined.

(b) By the problem formulation, we know that $\mathbb{P}[V] = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}[T|V] = \frac{4}{5}$ and $\mathbb{P}[T|V^c] = \frac{3}{10}$. So we obtain

$$\mathbb{P}[C] = \mathbb{P}[V \cap T] = \mathbb{P}[T|V]\,\mathbb{P}[V] = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

(c) The law of total probability (or $\mathbb{P}[T] = \mathbb{P}[T \cap V] + \mathbb{P}[T \cap V^c]$) gives

$$\mathbb{P}[T] = \mathbb{P}[T|V]\,\mathbb{P}[V] + \mathbb{P}[T|V^c]\,\mathbb{P}[V^c] = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}.$$

(d) We want to compute the probability $\mathbb{P}[V|T]$. For this, we use the definition of the conditional probability (or Bayes' theorem). We get

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[V|T] &= \frac{\mathbb{P}[V \cap T]}{\mathbb{P}[T]} = \frac{\mathbb{P}[T|V]\,\mathbb{P}[V]}{\mathbb{P}[T|V]\,\mathbb{P}[V] + \mathbb{P}[T|V^c]\,\mathbb{P}[V^c]} \\ &= \frac{4}{15} \cdot \frac{15}{7} \\ &= \frac{4}{7}.\end{aligned}$$

(e) Since

$$\mathbb{P}[V \cap T] = \frac{4}{15} \neq \frac{7}{45} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{15} = \mathbb{P}[V]\,\mathbb{P}[T],$$

we conclude that A and B are not independent.

Alternative proof: We directly see that $\mathbb{P}[V|T] = \frac{4}{7} \neq \frac{1}{3} = \mathbb{P}[V]$. Since $\mathbb{P}[V]$ and $\mathbb{P}[T]$ are not zero, we can use Proposition 1.30 from the lecture notes, that tells us that under these assumptions, independece of V and T would be equivalent to $\mathbb{P}[V|T] = \mathbb{P}[V]$. Thus, they are not independent.

(f) First we calculate

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[V^c \cap T^c\right] &= \mathbb{P}\left[T^c | V^c\right] \mathbb{P}\left[V^c\right] = \left(1 - \frac{3}{10}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \\
\mathbb{P}\left[V^c \cap T\right] &= \mathbb{P}\left[T | V^c\right] \mathbb{P}\left[V^c\right] = \frac{3}{10}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{6}{30} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \\
\mathbb{P}\left[V \cap T^c\right] &= \mathbb{P}\left[T^c | V\right] \mathbb{P}\left[V\right] = \left(1 - \frac{4}{5}\right)\frac{1}{3} = \frac{1}{15} \\
\mathbb{P}\left[V \cap T\right] &= \mathbb{P}\left[T | V\right] \mathbb{P}\left[V\right] = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15}.
\end{aligned}$$

We can define 4 elementary events $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ and $(1,1)$ such that

$$\begin{aligned}
V^c \cap T^c &= \{(0,0)\} \\
V^c \cap T &= \{(0,1)\} \\
V \cap T^c &= \{(1,0)\} \\
V \cap T &= \{(1,1)\}.
\end{aligned}$$

- $\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], E \mapsto \mathbb{P}\left[E\right] := \sum_{\omega \in E} p(\omega)$, where

$$p : \Omega \to [0,1], \omega \mapsto p(\omega) := \begin{cases} \frac{7}{15} & \text{if } \omega = (0,0) \\ \frac{3}{15} & \text{if } \omega = (0,1) \\ \frac{1}{15} & \text{if } \omega = (1,0) \\ \frac{4}{15} & \text{if } \omega = (1,1). \end{cases}$$

- $V = \{(1,0), (1,1)\}$
- $T = \{(0,1), (1,1)\}$

One can easily check that $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ actually is a probability space (e.g. $\mathbb{P}\left[\Omega\right] = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = p((0,0)) + p((0,1)) + p((1,0)) + p((1,1)) = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15} = 1$, all the other conditions are trivially fulfilled since Ω is finite.) and that every statement from Aufgabe 1.2 is fulfilled:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[V\right] &= \sum_{\omega \in V} p(\omega) = p((1,0)) + p((1,1)) = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} = \frac{1}{3} \\
\mathbb{P}\left[T | V\right] &= \frac{\mathbb{P}\left[V \cap T\right]}{\mathbb{P}\left[V\right]} = \frac{\mathbb{P}\left[\{(1,1)\}\right]}{\mathbb{P}\left[V\right]} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{5} \\
\mathbb{P}\left[T | V^c\right] &= \frac{\mathbb{P}\left[V^c \cap T\right]}{\mathbb{P}\left[V^c\right]} = \frac{\mathbb{P}\left[\{(0,1)\}\right]}{1 - \mathbb{P}\left[V\right]} = \frac{\frac{3}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{10}.
\end{aligned}$$

(i) $|\Omega| = 4$.
(ii) $|\mathcal{F}| = 2^{|\Omega|} = 2^4 = 16$.

Note: The chosen probability space is not unique, one could also define arbitrarily large probability spaces $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ with $|\Omega'| \geq 4$ that also fulfill every statement from Aufgabe 1.2. Note further that the solutions of (a)–(e) do not rely on a specific choice of the probability space but only use the statements from Aufgabe 1.2 and general properties that hold true for every probability space.

Note: The probability to be infected of a person that takes the test because of symptoms (or because of contact with an infected person) can differ widely from the probability to be infected of a randomly selected person.