ETH Zürich, Fühling 2021
Dozentin: Prof. Dr. Beatrice Acciaio   Übungsorganisator: Jakob Heiss

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 1

Version 4.1 (24. Juni 2021: Lösung richtig verlinkt); Version 4 (28. Februar: Aufgabe 1.3(b) geändert und Nummerierung von Aufgabe 1.3 geändert); Version 3 (Aufgabe 1.1(c) A geändert)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder stellt postet Fragen (anonym) in diesem file `https://docs.google.com/document/d/1AhLJZNTRsgkoC9Bmszy8kbYfTxFrEYZnSXGlSlm_0zc/edit?usp=sharing`

Bitte stelle sicher, das du zusätzlich zu zoom (zB auf deinem Laptop) gleichzeitig die Webseite `https://kahoot.it/` öffnen kannst (zB auf deinem smartphone) um optimal an der Übung am **1. März** teilnehmen zu können.

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann auf `https://sam-up.math.ethz.ch/` hochzuladen oder selbst mit der Lösung zu vergleichen.

Aufgabe 1.1

(a) Mit $A, B, C \subseteq \Omega$ bezeichne man Ereignisse. Welche der folgenden Schreibweisen ergeben einen Sinn und warum bzw. warum nicht?

i) $\mathbb{P}[A \cup (B \cap C)]$

ii) $\mathbb{P}[A^c] \cap \mathbb{P}[B]$

iii) $\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$

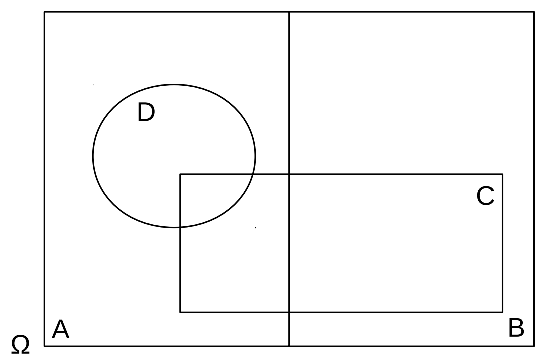
iv) $(\mathbb{P}[B])^c$

(b) Stellen Sie die folgenden Ereignisse im angegebenen Venn-Diagramm dar:

i) $C \cap D$

ii) $(D \setminus C) \cup (C \cap A)$

iii) $B \cup D$



(c) Über einen Nachrichtenkanal werden vier Signale übertragen. Jedes Signal wird entweder richtig oder falsch übertragen. Wir wählen als Grundraum Ω die Menge der 0-1-Folgen der Länge 4 gemäss

$$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, x_3, x_4) \, : \, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\},$$

d.h. $\Omega = \{(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), \ldots, (1,1,1,1)\}$ und interpretieren (für $i = 1, \ldots, 4$) $x_i = 1$ als "i-tes Signal richtig übertragen" und $x_i = 0$ als "i-tes Signal falsch übertragen".
Ferner betrachten wir folgende Ereignisse:

- A : "Genau ein Signal wird falsch übertragen"
- B : "Mindestens 2 Signale werden richtig übertragen"
- C : "Höchstens 2 Signale werden richtig übertragen".

Nun

i) schreibe die Ereignisse A, B und C als Teilmengen von Ω auf.

ii) beschreibe in Worten die Ereignisse $B \cap C$, $A \cup B$ und $A^c \cap C^c$.

iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C unter der Annahme, dass alle Elementarereignisse $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind.

Aufgabe 1.2 Ein Würfel wird so lange geworfen, bis eine 6 erscheint. An diesem Punkt wird das Experiment beendet. Was ist der Grundraum dieses Experiments? Sei E_n das Ereignis, dass n mal gewürfelt werden muss, bis das Experiment gestoppt wird. Welche Punkte des Grundraums sind in E_n enthalten? Wie lässt sich das Ereignis $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$ in Worten beschreiben?

Aufgabe 1.3

(a) Seien $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, 3$, beliebige Ereignisse. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left[A_1 \cup A_2\right] = \mathbb{P}\left[A_1\right] + \mathbb{P}\left[A_2\right] - \mathbb{P}\left[A_1 \cap A_2\right].$$

Finden Sie eine ähnliche Formel für $\mathbb{P}\left[A_1 \cup A_2 \cup A_3\right]$.

(b) Wir betrachten ein elektrisches Netzwerk mit drei parallelen Schaltern (R_1, R_2, R_3). Die Wahrscheinlichkeiten dass die Schalter R_1, R_2 und R_3 geschlossen sind, betragen 0.6, 0.55 und 0.5, respektive. Die Wahrscheinlichkeit, dass je zwei Schalter R_i und R_j gleichzeitig geschlossen sind, beträgt 0.25 für alle $i \neq j$. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Schalter geschlossen sind, beträgt 0.1.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Schalter geschlossen ist.

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an Jakob Heiss.