

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 3

Version 1.1 (24. Juni 2021: Lösung richtig verlinkt); Version 1 (6. März)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder stellt Fragen (anonym) in diesem file https://docs.google.com/document/d/1AhLJZNRsgkoC9Bmszy8kbYfTxFrEYZnSXG1Slm_0zc/edit?usp=sharing

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann auf <https://sam-up.math.ethz.ch/> hochzuladen oder selbst mit der Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **15. März**.

Aufgabe 3.1

- (a) Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum korrespondierend zum zweifachen Würfelwurf. Genauer gesagt statten wir die Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ mit der Menge der Ereignisse $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und der Laplace-Wahrscheinlichkeitsmass \mathbb{P} aus. Betrachten Sie die Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$X(\omega) = |\omega_1 - \omega_2|.$$

- Erklären Sie, wieso X eine Zufallsvariable ist.
 - Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X .
- (b) Betrachten Sie nun das Modell der Gleichverteilung auf $\Omega = [0, 1]^2$ mit \mathcal{F} die Borel- σ -Algebra auf $[0, 1]$.¹ Wir definieren die Abbildung $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch:

$$Y(\omega) = 2\omega_1 + 2\omega_2.$$

(mit der Notation aus der Vorlesung entspricht das dem Umfang des Rechtecks $R(\omega)$).

- Zeige, dass Y eine Zufallsvariable ist.
- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_Y von Y .

Aufgabe 3.2 Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a < 0 \\ a/2 & \text{falls } 0 \leq a < 1 \\ 2/3 & \text{falls } 1 \leq a < 2 \\ (a+1)/4 & \text{falls } 2 \leq a < 3 \\ 1 & \text{falls } 3 \leq a \end{cases}$$

- (a) Zeichne diese Verteilungsfunktion.
- (b) Bestimme folgende Wahrscheinlichkeiten: $\mathbb{P}[\{X < 1\}]$, $\mathbb{P}[\{X = 2\}]$, $\mathbb{P}[\{X = 3\}]$, $\mathbb{P}[\{1 < X \leq 2\}]$, $\mathbb{P}[\{1 \leq X < 2\}]$ und $\mathbb{P}[\{X \geq 3/2\}]$.

Aufgabe 3.3 Fünf faire Münzen werden nacheinander geworfen. Sei X die Zufallsvariable, welche die totale Anzahl erschienenen "Köpfe" zählt. Am Anfang setzen Sie 1 Franken Einsatz, wobei sie bei jedem Münzwurf 10% Ihres Einsatzes gewinnen, falls "Kopf" erscheint, und verlieren 10% ihres Einsatzes, falls "Zahl" erscheint. Vor jedem Münzwurf setzen Sie Ihren gesamten Wetteinsatz. Wir bezeichnen mit Y Ihren totalen Geldbetrag nach den fünf Münzwürfen.

- (a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X .
- (b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von Y .
- HINWEIS: Finden Sie f , so dass $Y = f(X)$.

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an [Jakob Heiss](#).

¹Diese ist definiert als die kleinste Menge von Teilmengen von Ω , die $H_1 - H_3$ aus Definition 1.2 des Skripts erfüllt und alle Mengen $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$, $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$ enthält.