Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 5

Version 6.1 (24. Juni 2021: Lösung richtig verlinkt); Version 6 (19. April: Notation für Potenzmenge von 2^Ω auf $\mathcal{P}(\Omega)$ passend zum Skript ausgebessert in Lösung von Aufgaben 5.4 und 5.6); Version 5.1 (17. April: Typo in Lösung von Aufgabe 5.2 ausgebessert: $\mathbb{P}[A] = \frac{1}{2}$); Version 4 (14. April: Lösung von Aufgabe 5.3(c)) Version 3 (12. April: Lösung von Aufgaben 5.4 und 5.6 ergänzt und minimal bessere Verlinkungen in der Lösung);Version 2 (3. April: Lösung von Aufgabe 5.3(c))

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum des Moodle-Kurs und/oder (anonym) in diesem file `https://docs.google.com/document/d/1AhLJZNTRsgkoC9Bmszy8kbYfTxFrEYZnSXGlSlm_0zc/edit?usp=sharing`

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann auf `https://sam-up.math.ethz.ch/` hochzuladen oder selbst mit der Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **12. April**.

Aufgabe 5.1 Zwei Würfel werden unabhängig voneinander geworfen. Wir modellieren dies mit einem Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2.$$

Seien X und Y Zufallsvariablen definiert durch $X(\omega) = \omega_1$ und $Y(\omega) = \omega_2$ (X und Y repräsentieren jeweils den Wert des ersten und zweiten Würfels). Betrachten Sie die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{X \in 2\mathbb{Z}\}, \\ B &= \{1 + Y \in 2\mathbb{Z}\}, \\ C &= \{X + Y \leq 3\}, \\ D &= \{X \leq 2, Y \leq 2\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) A und B sind unabhängig,

(b) A und C sind **nicht** unabhängig,

(c) A und D sind unabhängig,

(d) A, B, D sind paarweise unabhängig. Sind sie unabhängig?

Aufgabe 5.2 Wir betrachten den Wurf eines fairen Tetraeders, markiert mit den Zahlen 1 bis 4. Wir modellieren dies wiederum mit einem Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\},$$

wobei jedes $\omega \in \Omega$ gleichwahrscheinlich ist.

Zeigen Sie, dass die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2\}, \\ B &= \{1, 3\}, \\ C &= \{1, 4\}. \end{aligned}$$

paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig sind.

Aufgabe 5.3 Seien A, B und $\{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$ Ereignisse in einer σ-Algebra $\mathcal{F}$. Nehme an, dass die A_i paarweise disjunkt sind.

(a) Zeige, dass A und B unabhängig sind genau dann, wenn A^c und B^c unabhängig sind.

(b) Zeige, falls für alle $i = 1, \ldots, n$, A and A_i paarweise unabhängig sind, dass dann A und $\bigcup_{i=1}^n A_i$ unabhängig sind.

(c) Nehme an, dass $\mathbb{P}(A) = 1$ ist. Zeige, dass für alle $B \in \mathcal{F}$, A and B unabhängig sind.

Aufgabe 5.4 Wir betrachten ein Kartenblatt mit den üblichen 52 Karten und 4 Farben (Herz, Kreuz, Karo und Pik). Sind die folgenden Ereignisse unabängig?

(a) Wir ziehen eine Karte und betrachten die Ereignisse $A = <$ Du hast einen König gezogen $>$ und $B = <$ Du hast eine Pik-Karte gezogen $>$.

(b) Wir ziehen zwei Karten **mit Zurücklegen** und betrachten die Ereignisse $A = <$ Du ziehst ein Paar $>$ und $B = <$ Du hast zwei Herzkarten gezogen $>$. Nehme an, dass die Reihenfolge der Verteilten Karten eine Rolle spielt.

(c) Wir ziehen zwei Karten **ohne Zurücklegen** und betrachten die Ereignisse $A = <$ Du ziehst ein Paar $>$ und $B = <$ Du ziehst zwei Kreuz-Karten $>$. Nehme an, dass die Reihenfolge der Karten keine Rolle spielt.

Aufgabe 5.5 Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $A \in \mathcal{F}$. Betrachten Sie die **Indikatorfunktion** $\mathbb{1}_A$ von A, definiert durch

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } \omega \notin A, \\ 1 & \text{if } \omega \in A. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_A$ eine Zufallsvariable ist.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $\mathbb{1}_A$

(c) Sei $B \in \mathcal{F}$ ein anderes Ereignis. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) A und B sind unabhängig,

(ii) Die Zufallsvariablen $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ sind unabhängig.

Aufgabe 5.6

(a) Alice rolls a die (Würfel) and pays the square of the resulting number (quadrierte Augenzahl) to Bob in CHF.

i) Define a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ that describes rolling the die.

ii) Define a random variable X that describes how many CHF Bob receives, and write down its distribution (Vertailung).

iii) Calculate the expected value $\mathbb{E}[X]$.

(b) Three people each toss a fair coin. What is the probability of someone being the "odd man out"? This means that two of the players obtain the same outcome, while the third gets a different one. Please start solving this problem by defining a suitable probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an Jakob Heiss.