ETH Zürich, Fühling 2021
Dozentin: Prof. Dr. Beatrice Acciaio — Übungsorganisator: Jakob Heiss

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 6

Version 2.1 (24. Juni 2021: Lösung richtig verlinkt); Version 2 (19. April: Doppeldeutige Notation $2^{\mathbb{N}}$ vermieden. In der Literatur kann $2^{\mathbb{N}}$ sowohl für die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ als auch für die Menge $\{ 2^n : n \in \mathbb{N} \}$ stehen. Diese beiden Mengen sind sehr verschieden, darum wird in der neuen Version von Aufgabe 6.4 und dessen Lösung die Notation Notation $2^{\mathbb{N}}$ vermieden.); Version 1.2 (14. April: Datum der nächsten Übung auf 26. April korrigiert, wegen Sechseläuten. V1.1: Rechtschreibung und Verlinkung)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum des Moodle-Kurs und/oder (anonym) in diesem file https://docs.google.com/document/d/1AhLJZNTRsgkoC9Bmszy8kbYfTxFrEYZnSXGlSlm_0zc/edit?usp=sharing

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann auf https://sam-up.math.ethz.ch/ hochzuladen oder selbst mit der Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **26. April**, **am 19. April findet keine Übung statt wegen Sechseläuten**.

Aufgabe 6.1 Eine faire Münze wird dreimal geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl geworfener „Köpfe" in den ersten beiden Würfen. Die Zufallsvariable Y beschreibt die Anzahl geworfener „Köpfe" im letzten Wurf. Berechnen Sie die Verteilung von X, Y, $X+Y$, und $X-Y$.

Aufgabe 6.2 Die Anzahl Y defekter Stellen auf einem Chip sei poissonverteilt mit Parameter λ. Sei X die Anzahl der Fehler in einem bestimmten Teilgebiet des Chips. Wir nehmen an, dass sich jeder der insgesamt Y Fehler unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ in diesem Teilgebiet befindet.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von X und die von $Y - X$.

(b) Sind X und $Y - X$ unabhängig?

Aufgabe 6.3 Ein Nachrichtenkanal überträgt binäre Codewörter zu je 1024 Bits. Die einzelnen Bits werden unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = 10^{-3}$ falsch übertragen. Ein Wort wird *genau dann* richtig decodiert, *wenn* es höchstens drei falsch übermittelte Bits enthält. Es bezeichne X die Anzahl falsch übertragener Bits in einem Codewort.

(a) Welche Verteilung besitzt X ?

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Codewort richtig decodiert wird. Dazu ist die passende Approximation der Verteilung von X zu verwenden.

(c) Eine Meldung bestehend aus 10 Wörtern wird übermittelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Wort falsch decodiert wird.

Aufgabe 6.4

(a) Construct a discrete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ and discrete random variables $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ on it, such that

i) $\mathbb{P}[X < \infty] = 1$ and $\mathbb{E}[X] = \infty$.

ii) $\mathbb{E}[Y] < \infty$ and $\mathbb{E}\left[Y^2\right] = \infty$.

(b) Is it possible to construct on a discrete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a discrete random variable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ such that $\mathbb{E}[Z] = \infty$ and $\mathbb{E}\left[Z^2\right] < \infty$?

Aufgabe 6.5 Gegeben seien $\lambda > 0$ und eine Zufallsvariable X mit Werten in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und

$$\mathbb{P}[X = n] = c\frac{\lambda^n}{n!} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Es sei Y eine von X unabhängige Zufallsvariable, die poissonverteilt mit Parameter λ ist, d.h.

$$\mathbb{P}[Y = n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Geben Sie zu jedem der folgenden Ausdrücke an, ob er gleich oder ungleich $\mathbb{P}[X = n]$ ist, wobei $n \in \mathbb{N}$.

(**A**) $\mathbb{P}[X = Y \mid Y = n]$
(**B**) $\mathbb{P}[0 \neq Y = n]$
(**C**) $\mathbb{P}[Y = n \mid Y \neq 0]$
(**D**) $\mathbb{P}[Y \neq 0 \mid Y = n]$
(**E**) $\mathbb{P}[X = n \mid Y = 0]$

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an Jakob Heiss.