

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Serie 8

Version 1.1 (24. Juni 2021: [Lösung](#) richtig verlinkt); Version 1 (30. April)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im [Forum](#) des Moodle-Kurs und/oder (anonym) in diesem file https://docs.google.com/document/d/1AhLJZNRsgkoC9Bmszy8kbYfTxFrEYznSXG1S1m_Ozc/edit?usp=sharing

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann auf <https://sam-up.math.ethz.ch/> hochzuladen oder selbst mit der [Lösung](#) zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **10. Mai**.

Aufgabe 8.1

- (a) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\sum_{j=0}^k \binom{m}{k-j} \binom{n}{j}$, wobei $m, n, k \geq 1$.
HINWEIS: Benützen Sie die Identität $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$, $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Seien X und Y zwei binomial verteilte Zufallsvariablen mit Parametern (m, p) bzw. (n, p) .
Angenommen X und Y sind unabhängig, was ist die Verteilung von $X+Y$? Leiten sie dieses Resultat mithilfe von (a) her ohne Remark 2.13 aus dem [Skript](#) zu verwenden.
- (c) Wir betrachten eine Urne mit 5 schwarzen und 5 weissen Kugeln. Wir ziehen $n \geq 1$ Kugeln mit Zurücklegen. Sei X' die Anzahl weisser Kugeln, welche gezogen wurden, und sei Y' die Anzahl schwarzer Kugeln, welche gezogen wurden.
Was sind die Verteilungen von X' , Y' und $X'+Y'$? Widerspricht dies dem Resultat aus (b)?

Aufgabe 8.2 Ein Fabrikant verwendet Komponenten A, B, C um Chips herzustellen. Ein Chip wird aus einer Komponente A und einer Komponente B oder aus einer Komponente A und einer Komponente C hergestellt. Beide Möglichkeiten sind gleich wahrscheinlich. Die Komponenten A, B, C haben respektiv X, Y, Z Fehlerstellen. Wir nehmen an, dass X, Y, Z unabhängig und Poisson verteilt sind mit respektiven Parametern λ, μ und 2μ . Sei N die Anzahl Fehlerstellen in einem Chip.

- (a) Berechnen Sie explizit die Verteilungen von $X+Y$ und $X+Z$.
- (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Chip die Komponente B enthält, falls $N=n$, für $n \geq 0$.
- (c) Berechnen Sie den Erwartungswert von N .

Aufgabe 8.3 Wir betrachten einen Kreis mit zufälligem Radius R . Der Radius R sei exponentialverteilt mit Erwartungswert $1/\lambda$. Bestimmen Sie

- (a) die Verteilungs- und Dichtefunktion des Flächeninhalts A des zufälligen Kreises;
- (b) den Erwartungswert von A .

Aufgabe 8.4 Eine Zufallsvariable X habe die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{(1+x)^5}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Finden Sie c und die Verteilungsfunktion von X .
- (b) Finden Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[X^2]$.
HINWEIS: Berechnen Sie zuerst $\mathbb{E}[1+X]$ und $\mathbb{E}[(1+X)^2]$.
- (c) Was sind die Verteilungsfunktion und die Dichte von $Y = e^X$?

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an [Jakob Heiss](#).