

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lösungen Serie 1

Version 4 (28. Februar 2021, Aufgabe 1.3(b) geändert und Nummerierung von 1.3 geändert), Version 3 (1.1(c) A geändert)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder stellt postet Fragen (anonym) in diesem file https://docs.google.com/document/d/1AhLJZNRsgkoC9Bmszy8kbYfTxFrEYZnSXG1S1m_0zc/edit?usp=sharing

Bitte stelle sicher, das du zusätzlich zu zoom (zB auf deinem Laptop) gleichzeitig die Webseite <https://kahoot.it/> öffnen kannst (zB auf deinem smartphone) um optimal an der Übung am **1. März** teilnehmen zu können.

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann auf <https://sam-up.math.ethz.ch/> hochzuladen oder selbst mit dieser Lösung zu vergleichen.

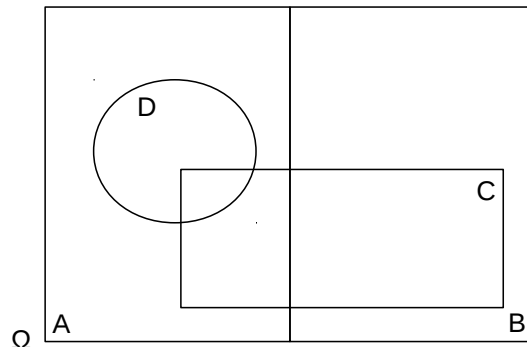
Aufgabe 1.1

- (a) Mit $A, B, C \subseteq \Omega$ bezeichne man Ereignisse. Welche der folgenden Schreibweisen ergeben einen Sinn und warum bzw. warum nicht?

- i) $\mathbb{P}[A \cup (B \cap C)]$
- ii) $\mathbb{P}[A^c] \cap \mathbb{P}[B]$
- iii) $\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$
- iv) $(\mathbb{P}[B])^c$

- (b) Stellen Sie die folgenden Ereignisse im angegebenen Venn-Diagramm dar:

- i) $C \cap D$
- ii) $(D \setminus C) \cup (C \cap A)$
- iii) $B \cup D$



- (c) Über einen Nachrichtenkanal werden vier Signale übertragen. Jedes Signal wird entweder richtig oder falsch übertragen. Wir wählen als Grundraum Ω die Menge der 0-1-Folgen der Länge 4 gemäss

$$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\},$$

d.h. $\Omega = \{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), \dots, (1, 1, 1, 1)\}$ und interpretieren (für $i = 1, \dots, 4$) $x_i = 1$ als “ i -tes Signal richtig übertragen” und $x_i = 0$ als “ i -tes Signal falsch übertragen”.

Ferner betrachten wir folgende Ereignisse:

- A : ”Genau ein Signal wird falsch übertragen”
- B : ”Mindestens 2 Signale werden richtig übertragen”
- C : ”Höchstens 2 Signale werden richtig übertragen”.

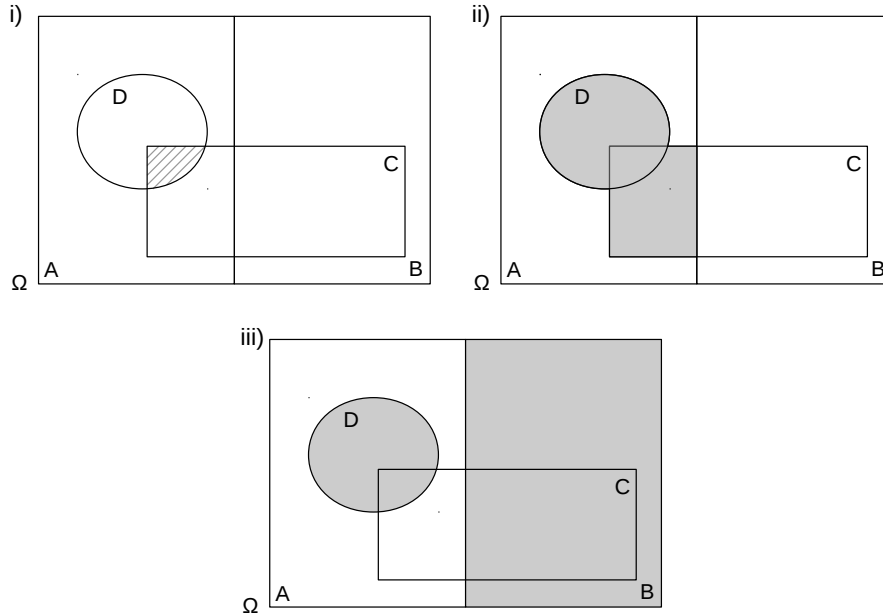
Nun

- i) schreibe die Ereignisse A , B und C als Teilmengen von Ω auf.

- ii) beschreibe in Worten die Ereignisse $B \cap C$, $A \cup B$ und $A^c \cap C^c$.
- iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A , B und C unter der Annahme, dass alle Elementarereignisse $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind.

Lösung 1.1

- (a) i) und iii) sind sinnvoll; ii) und iv) hingegen nicht. Zu ii): der Durchschnittsoperator “ \cap ” ist nur auf Mengen anwendbar. Zu iv): Komplementärereignisse sind nur auf Mengen und nicht auf Wahrscheinlichkeiten anwendbar.
- (b) Die Darstellung ist



- (c) i)

$$\begin{aligned}
 A &= \{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\} \\
 B &= \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), \\
 &\quad (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\} \\
 C &= \{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), \\
 &\quad (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}
 \end{aligned}$$

- ii) $B \cap C$: “Exactly two signals are transmitted correctly.”
 $A \cup B$: “At least two signals are transmitted correctly (note that $A \subseteq B$).”
 A^c : “Either none or at least two of the signals are transmitted incorrectly.” Alternative formulation: “All or at most two signals is transmitted correctly.” Alternative formulation: “0 or 1 or 2 or 4 signals are transmitted correctly.”
 C^c : “At least three signals are transmitted correctly.” Alternative formulation: “3 or 4 signals are transmitted correctly.”
 $A^c \cap C^c$: “All of the four signals are transmitted correctly.”
- (d) Ω hat $2^4 = 16$ Elemente. Da alle Elementarereignisse (x_1, x_2, x_3, x_4) gleich wahrscheinlich sein sollen und sich die Wahrscheinlichkeiten zu Eins summieren müssen, haben alle Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$. Um diese Aufgabe rigoros lösen zu können müssen wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definieren. Wegen voriger Argumentation wählen wir ein Laplace-Modell.

- Der Grundraum $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\}$ ist hier schon in der Angabe gegeben.
- Die σ -Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ kann hier als Potenzmenge von Ω gewählt werden.
- Das Wahrscheinlichkeitsmaß muss dann als Abbildung

$$\mathbb{P} : \begin{array}{l} \mathcal{F} \rightarrow [0, 1] \\ A \mapsto \mathbb{P}[A] := \frac{|A|}{16} \end{array}$$

definiert werden.

Die Wahrscheinlichkeiten von A, B, C kann man somit bestimmen, indem man jeweils zählt, wieviele Elemente die Ereignisse haben. Also

$$\mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}[B] = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{11}{16} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[C] = \frac{11}{16}.$$

Aufgabe 1.2 Ein Würfel wird so lange geworfen, bis eine 6 erscheint. An diesem Punkt wird das Experiment beendet. Was ist der Grundraum dieses Experiments? Sei E_n das Ereignis, dass n mal gewürfelt werden muss, bis das Experiment gestoppt wird. Welche Punkte des Grundraums sind in E_n enthalten? Wie lässt sich das Ereignis $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$ in Worten beschreiben?

Lösung 1.2 Das Experiment wird entweder nach endlicher Zeit abgebrochen (nämlich wenn eine 6 gewürfelt wird) oder man würfelt unendlich lange. Also definieren wir

$$\begin{aligned} E_n &= \{(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, 6) : \omega_i \in \{1, \dots, 5\}, 1 \leq i \leq n-1\} \\ E_{\infty} &= \{1, \dots, 5\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i \in \{1, \dots, 5\}, \forall i \geq 1\} \end{aligned}$$

Damit lässt sich der Grundraum als

$$\Omega = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \cup E_{\infty}$$

darstellen. Beachten Sie, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ äquivalente Notationen sind und deshalb dieselbe Menge bezeichnen (insbesondere ist E_{∞} in der Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ nicht enthalten). Also stellt

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n^c = E_{\infty}$$

das Ereignis "Es wird nie eine 6 gewürfelt" dar.

Aufgabe 1.3

- (a) Seien $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, 3$, beliebige Ereignisse. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2].$$

Finden Sie eine ähnliche Formel für $\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup A_3]$.

- (b) Wir betrachten ein elektrisches Netzwerk mit drei parallelen Schaltern (R_1, R_2, R_3) . Die Wahrscheinlichkeiten dass die Schalter R_1 , R_2 und R_3 geschlossen sind, betragen 0.6, 0.55 und 0.5, respektive. Die Wahrscheinlichkeit, dass je zwei Schalter R_i und R_j gleichzeitig geschlossen sind, beträgt 0.25 für alle $i \neq j$. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Schalter geschlossen sind, beträgt 0.1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Schalter geschlossen ist.

Lösung 1.3

- (a) Wir setzen $A_1 \cup A_2 = A$ und verwenden die Formel des Skripts:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup A_3] &= \mathbb{P}[A \cup A_3] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[A_3] - \mathbb{P}[A \cap A_3] \\ &= \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \mathbb{P}[A_3] - \mathbb{P}[(A_1 \cup A_2) \cap A_3]. \end{aligned}$$

Wir schreiben $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = B \cup C$, wobei $B = A_1 \cap A_3$ und $C = A_2 \cap A_3$, und verwenden

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup A_3] &= \mathbb{P}[A_3] + \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] \\ &\quad - \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[B \cap C] \end{aligned}$$

Wegen $B \cap C = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup A_3] &= \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \mathbb{P}[A_3] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_3] \\ &\quad - \mathbb{P}[A_2 \cap A_3] + \mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3] \end{aligned}$$

Beachte, dass diese Rechnungen nur deshalb Sinn machen, weil in jedem Schritt nur Elemente der σ -Algebra \mathcal{F} in \mathbb{P} eingesetzt werden (Weil $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$, wissen wir z.B., dass $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \in \mathcal{F}$).

Bemerkung: Dies ist ein Spezialfall (für $n = 3$) vom Prinzip der Inklusion und Exklusion

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left[\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right].$$

(b) Wir definieren das Ereignis $E_i =$ „Schalter R_i ist geschlossen“. Die obige Formel ergibt dann:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[E_1 \cup E_2 \cup E_3] &= \mathbb{P}[E_1] + \mathbb{P}[E_2] + \mathbb{P}[E_3] - \mathbb{P}[E_1 \cap E_2] \\ &\quad - \mathbb{P}[E_1 \cap E_3] - \mathbb{P}[E_2 \cap E_3] + \mathbb{P}[E_1 \cap E_2 \cap E_3] \\ &= 0.6 + 0.55 + 0.5 - 3 \cdot 0.25 + 0.1 = 1. \end{aligned}$$

Bemerken Sie, dass die Schalter *nicht* unabhängig sind. (Eine genaue mathematische Definition von “unabhängig” wird später in der Vorlesung eingeführt werden.)

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an [Jakob Heiss](#).