

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lösungen Serie 3

Version 1 (6. März 2021)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder stellt Fragen (anonym) in diesem file https://docs.google.com/document/d/1AhLJZNRsgkoC9Bmszy8kbYfTxFrEYznSXG1Slm_Ozc/edit?usp=sharing

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann auf <https://sam-up.math.ethz.ch/> hochzuladen oder selbst mit dieser Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **15. März**.

Aufgabe 3.1

- (a) Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum korrespondierend zum zweifachen Würfelwurf. Genauer gesagt statten wir die Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ mit der Menge der Ereignisse $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und der Laplace-Wahrscheinlichkeitsmass \mathbb{P} aus. Betrachten Sie die Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$X(\omega) = |\omega_1 - \omega_2|.$$

- Erklären Sie, wieso X eine Zufallsvariable ist.
 - Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X .
- (b) Betrachten Sie nun das Modell der Gleichverteilung auf $\Omega = [0, 1]^2$ mit \mathcal{F} die Borel- σ -Algebra auf $[0, 1]^2$.¹ Wir definieren die Abbildung $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch:

$$Y(\omega) = 2\omega_1 + 2\omega_2.$$

(mit der Notation aus der Vorlesung entspricht das dem Umfang des Rechtecks $R(\omega)$.)

- Zeige, dass Y eine Zufallsvariable ist.
- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_Y von Y .

Lösung 3.1

- (a) Wir begründen zunächst, dass X tatsächlich eine Zufallsvariable ist. Hierzu müssen wir nachweisen, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}.$$

Da aber $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ gilt, ist dies immer erfüllt, also ist X tatsächlich eine Zufallsvariable.

Als Nächstes berechnen wir die Verteilungsfunktion F_X von X : Offensichtlich ist für $x < 0$

$$F_X(x) = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = |\omega_1 - \omega_2| < x\}] = 0,$$

da $|u| \geq 0$ für jede reelle Zahl u gilt.

Sei nun $x \geq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = |\omega_1 - \omega_2| \leq x\}] \\ &= \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| \leq [x]\}] \\ &= \sum_{n=0}^{[x]} \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = n\}] \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $|\omega_1 - \omega_2|$ für $\omega \in \Omega$ nur ganzzahlige Werte annehmen kann, sowie die Notation

$$[x] := \max\{\ell \in \mathbb{Z} : \ell \leq x\}$$

¹Diese ist definiert als die kleinste Menge von Teilmengen von Ω , die H1 – H3 aus [Definition 1.2](#) des [Skripts](#) erfüllt **und** alle Mengen $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$, $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$ enthält.

für die Abrundungsfunktion. Jetzt berechnen wir:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 0\}] &= \mathbb{P}[\{(1, 1), \dots, (6, 6)\}] = \frac{6}{36} \\ \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 1\}] &= \mathbb{P}[\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), \dots, (5, 6), (6, 5)\}] = \frac{10}{36} \\ \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 2\}] &= \mathbb{P}[\{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), \dots, (4, 6), (6, 4)\}] = \frac{8}{36} \\ \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 3\}] &= \mathbb{P}[\{(1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3)\}] = \frac{6}{36} \\ \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 4\}] &= \mathbb{P}[\{(1, 5), (5, 1), (2, 6), (6, 2)\}] = \frac{4}{36} \\ \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : |\omega_1 - \omega_2| = 5\}] &= \mathbb{P}[\{(1, 6), (6, 1)\}] = \frac{2}{36} \end{aligned}$$

Damit können wir nun die Verteilungsfunktion explizit bestimmen:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{6}{36}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{6}{36} + \frac{10}{36}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36}, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{6}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{9}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{3}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{5}{6}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{17}{18}, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

- (b) Wir beweisen zunächst wieder, dass Y eine Zufallsvariable ist. Dazu müssen wir wieder überprüfen, dass $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F},$$

wobei \mathcal{F} die Borel- σ -Algebra auf $\Omega = [0, 1]^2$ ist. Zunächst sehen wir, dass für $a < 0$ gilt:

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq a\} = \{\omega \in [0, 1]^2 : 2\omega_1 + 2\omega_2 \leq a\} = \emptyset \in \mathcal{F}$$

da jede σ -Algebra die leere Menge enthält (Proposition 1.5, *i*). Analog ist auch für $a \geq 4$:

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq a\} = \{\omega \in [0, 1]^2 : 2\omega_1 + 2\omega_2 \leq a\} = \Omega \in \mathcal{F}$$

Sei also $a \in [0, 4)$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : Y(\omega) > a\} &= \{\omega \in [0, 1]^2 : 2\omega_1 + 2\omega_2 > a\} \\ &= \{\omega \in [0, 1]^2 : 0 \leq \omega_1 \leq 1, \frac{a}{2} - \omega_1 < \omega_2 \leq 1, \omega_2 \geq 0\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\bigcup_{x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} [x, 1] \times \left(\frac{a}{2} - x, 1\right] \right) \cap \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ &= \bigcup_{x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{[x, 1] \times [\max\{\frac{a}{2} - x + \frac{1}{n}, 0\}, 1]}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

denn $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist abzählbar und abzählbare Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{F} liegen wieder in \mathcal{F} (Definition 1.2, H3).

In (*) haben wir verwendet, dass \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} liegt, das bedeutet, falls für $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ gilt, dass $0 \leq \omega_1 \leq 1$ und $\frac{a}{2} - \omega_1 < \omega_2 \leq 1$, dann finden wir ein $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ sodass:

$$\omega_1 \geq x, \quad \omega_2 > \frac{a}{2} - x.$$

In der Tat finden wir so ein x , indem wir eine Folge $x_n \uparrow \omega_1$ wählen mit $x_n \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ und bemerken, dass wegen $\omega_2 > \frac{a}{2} - \omega_1$ auch gilt, dass $\omega_2 > \frac{a}{2} - x_n$ für $n \geq N$ und wir können $x := x_N$ setzen.

Da aber \mathcal{F} eine σ -Algebra ist, liegt mit $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) > a\}$ auch $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq a\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) > a\}^c \in \mathcal{F}$.

Wir berechnen nun die Verteilungsfunktion F_Y von Y . Wie wir bereits oben gesehen haben, gilt:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}] = \mathbb{P}[\emptyset] = 0, \quad y < 0$$

sowie

$$F_Y(y) = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}] = \mathbb{P}[\Omega] = 1, \quad y \geq 4.$$

Sei zunächst $y \in [0, 2)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}] \\ &= \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : 2\omega_1 + 2\omega_2 \leq y\}] \\ &= \text{Area}(\{\omega \in \Omega : 2\omega_1 + 2\omega_2 \leq y\}) \end{aligned}$$

Man erkennt leicht, dass diese Fläche gerade das (abgeschlossene) Dreieck begrenzt durch die Punkte $(0, 0)$, $(0, \frac{y}{2})$ und $(\frac{y}{2}, 0)$ ist, welches eine Fläche von $\frac{y^2}{8}$ besitzt (in der Tat, $2\omega_1 + 2\omega_2 \leq y \Leftrightarrow (\omega_1 \in [0, \frac{y}{2}] \text{ und } \omega_2 \in [0, \frac{y}{2} - \omega_1])$).

Für $y \in [2, 4)$ berechnen wir stattdessen

$$\begin{aligned} 1 - F_Y(y) &= \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : Y(\omega) > y\}] \\ &= \text{Area}(\{\omega \in \Omega : 2\omega_1 + 2\omega_2 > y\}) = \frac{1}{2}(2 - \frac{y}{2})^2, \end{aligned}$$

da die Fläche hier gegeben ist als das (offene) Dreieck begrenzt durch die Punkte $(1, 1)$, $(\frac{y}{2} - 1, 1)$ und $(1, \frac{y}{2} - 1)$. Damit gilt $F_Y(y) = 1 - \frac{1}{2}(2 - \frac{y}{2})^2 = y - \frac{y^2}{8} - 1$. Damit erhalten wir schliesslich die Verteilungsfunktion:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{y^2}{8}, & 0 \leq y < 2 \\ y - \frac{y^2}{8} - 1, & 2 \leq y < 4 \\ 1, & y \geq 4. \end{cases}$$

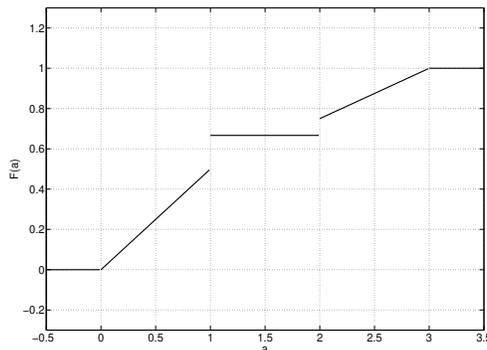
Aufgabe 3.2 Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a < 0 \\ a/2 & \text{falls } 0 \leq a < 1 \\ 2/3 & \text{falls } 1 \leq a < 2 \\ (a + 1)/4 & \text{falls } 2 \leq a < 3 \\ 1 & \text{falls } 3 \leq a \end{cases}$$

- (a) Zeichne diese Verteilungsfunktion.
- (b) Bestimme folgende Wahrscheinlichkeiten: $\mathbb{P}[\{X < 1\}]$, $\mathbb{P}[\{X = 2\}]$, $\mathbb{P}[\{X = 3\}]$, $\mathbb{P}[\{1 < X \leq 2\}]$, $\mathbb{P}[\{1 \leq X < 2\}]$ und $\mathbb{P}[\{X \geq 3/2\}]$.

Lösung 3.2

- (a) Der Graph von F verläuft folgendermassen:



- (b) $\mathbb{P}\{\{X < 1\}\} = F(1^-) = 1/2$
 $\mathbb{P}\{\{X = 2\}\} = F(2) - F(2^-) = 3/4 - 2/3 = 1/12$
 $\mathbb{P}\{\{X = 3\}\} = 0$ (da F stetig im Punkt 3)
 $\mathbb{P}\{\{1 < X \leq 2\}\} = F(2) - F(1) = 3/4 - 2/3 = 1/12$
 $\mathbb{P}\{\{1 \leq X < 2\}\} = F(2^-) - F(1^-) = 2/3 - 1/2 = 1/6$
 $\mathbb{P}\{\{X \geq 3/2\}\} = 1 - F(1.5^-) = 1 - 2/3 = 1/3.$

Aufgabe 3.3 Fünf faire Münzen werden nacheinander geworfen. Sei X die Zufallsvariable, welche die totale Anzahl erschienenen “Köpfe” zählt. Am Anfang setzen Sie 1 Franken Einsatz, wobei sie bei jedem Münzwurf 10% Ihres Einsatzes gewinnen, falls “Kopf” erscheint, und verlieren 10% ihres Einsatzes, falls “Zahl” erscheint. Vor jedem Münzwurf setzen Sie Ihren gesamten Wetteinsatz. Wir bezeichnen mit Y Ihren totalen Geldbetrag nach den fünf Münzwürfen.

- (a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X .
 (b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von Y .
 HINWEIS: Finden Sie f , so dass $Y = f(X)$.

Lösung 3.3

- (a) Da es sich um eine faire Münze handelt, verwenden wir ein Laplace Modell mit $\Omega = \{\text{“Kopf”}, \text{“Zahl”}\}^5$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und alle Elementarereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit $1/2^5 = 1/32$. Wir berechnen $\mathbb{P}[X = i]$, für $i = 0, \dots, 5$. Da wir ein Laplace Modell voraussetzen, müssen wir alle Elementarereignisse zählen, bei denen genau i -mal “Kopf” erscheint. Wir erhalten $\binom{5}{i}$ und somit $\mathbb{P}[X = i] = \binom{5}{i}/32$. Als Verteilungsfunktion erhalten wir

$$F_X(x) = \sum_{i \leq x; 0 \leq i \leq 5} \frac{\binom{5}{i}}{32} = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1/32 & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ 3/16 & \text{falls } 1 \leq x < 2, \\ 1/2 & \text{falls } 2 \leq x < 3, \\ 13/16 & \text{falls } 3 \leq x < 4, \\ 31/32 & \text{falls } 4 \leq x < 5, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (b) Wir bemerken, dass der totale Geldbetrag Y nach dem Spiel nur von der Anzahl erschienenen “Köpfe” abhängt. Es gilt nämlich $Y = f(X) = (1.1)^X \times (0.9)^{5-X}$. Da f wachsend ist, erhalten wir folgende Verteilungsfunktion von Y :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y < 0.9^5, \\ 1/32 & \text{falls } 0.9^5 \leq y < 1.1 \times 0.9^4, \\ 3/16 & \text{falls } 1.1 \times 0.9^4 \leq y < 1.1^2 \times 0.9^3, \\ 1/2 & \text{falls } 1.1^2 \times 0.9^3 \leq y < 1.1^3 \times 0.9^2, \\ 13/16 & \text{falls } 1.1^3 \times 0.9^2 \leq y < 1.1^4 \times 0.9^1, \\ 31/32 & \text{falls } 1.1^4 \times 0.9^1 \leq y < 1.1^5, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an [Jakob Heiss](#).