Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lösungen Serie 5

Version 6 (19. April 2021: Notation für Potenzmenge von 2^Ω auf $\mathcal{P}(\Omega)$ passend zum Skript ausgebessert in Lösungen 5.4 und 5.6); Version 5.1 (17. April: Typo in Lösung von Aufgabe 5.2 ausgebessert: $\mathbb{P}[A] = \frac{1}{2}$); Version 4 (14. April: Lösung von Aufgabe 5.3(c)) Version 3 (12. April: Lösungen 5.4 und 5.6 ergänzt und minimal bessere Verlinkungen in Lösung 5.5(c));Version 2 (3. April: Lösung von Aufgabe 5.3(c))

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum des Moodle-Kurs und/oder (anonym) in diesem file https://docs.google.com/document/d/1AhLJZNTRsgkoC9Bmszy8kbYfTxFrEYZnSXGlSlm_0zc/edit?usp=sharing

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann auf https://sam-up.math.ethz.ch/ hochzuladen oder selbst mit dieser Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **12. April**.

Aufgabe 5.1 Zwei Würfel werden unabhängig voneinander geworfen. Wir modellieren dies mit einem Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2.$$

Seien X und Y Zufallsvariablen definiert durch $X(\omega) = \omega_1$ und $Y(\omega) = \omega_2$ (X und Y repräsentieren jeweils den Wert des ersten und zweiten Würfels). Betrachten Sie die Ereignisse

$$\begin{aligned}
A &= \{X \in 2\mathbb{Z}\},\\
B &= \{1 + Y \in 2\mathbb{Z}\},\\
C &= \{X + Y \le 3\},\\
D &= \{X \le 2, Y \le 2\}.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) A und B sind unabhängig,

(b) A und C sind **nicht** unabhängig,

(c) A und D sind unabhängig,

(d) A, B, D sind paarweise unabhängig. Sind sie unabhängig?

Lösung 5.1 Wir geben zunächst die Ereignisse A, B, C, D in aufzählender Form an:

$$\begin{aligned}
A &= \{X \in 2\mathbb{Z}\} = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \{2, 4, 6\}\} = \{2, 4, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\\
&= \{(2, 1), (2, 2), ..., (2, 6), (4, 1), (4, 2), ..., (4, 6), (6, 1), (6, 2), ..., (6, 6)\}\\
B &= \{1 + Y \in 2\mathbb{Z}\} = \{(\omega_1, \omega_2) : 1 + \omega_2 \in \{2, 4, 6\}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 3, 5\}\\
&= \{(1, 1), (2, 1), ..., (6, 1), (1, 3), (2, 3), ..., (6, 3), (1, 5), (2, 5), ..., (6, 5)\}\\
C &= \{X + Y \le 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}\\
D &= \{X \le 2,\ Y \le 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}
\end{aligned}$$

(a) Wir müssen nachweisen, dass $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$ gilt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A] &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|\{2, 4, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}|}{|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2|} = \frac{3 \cdot 6}{6^2} = \frac{1}{2}\\
\mathbb{P}[B] &= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 3, 5\}|}{|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2|} = \frac{3 \cdot 6}{6^2} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

andererseits gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A \cap B] &= \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \\ &= \frac{|\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5)\}|}{6^2} \\ &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]\,.\end{aligned}$$

Damit sind A und B unabhängig.

(b) Es gilt:

$$\mathbb{P}[C] = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{|\{(1,1),(1,2),(2,1)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12},$$

andererseits haben wir

$$\mathbb{P}[A \cap C] = \frac{|A \cap C|}{|\Omega|} = \frac{|\{(2,1)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[C]$$

Damit sind A und C nicht unabhängig.

(c) Analog zu Teil (b) rechnen wir:

$$\mathbb{P}[D] = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{|\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{4}{6^2} = \frac{1}{9},$$

andererseits haben wir

$$\mathbb{P}[A \cap D] = \frac{|A \cap D|}{|\Omega|} = \frac{|\{(2,1),(2,2)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[D]\,.$$

(d) Für die paarweise Unabhängigkeit von A, B und D ist nachzuweisen:

- $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B] \rightsquigarrow$ siehe (a)
- $\mathbb{P}[A \cap D] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[D] \rightsquigarrow$ siehe (c)
- $\mathbb{P}[B \cap D] = \frac{|\{(1,1),(2,1)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \cdot = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[D]$

A, B, D sind unabhängig, denn es gilt

$$\mathbb{P}[A \cap B \cap D] = \frac{|\{(2,1)\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{36},$$

was auch $\mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[D]$ entspricht.

Aufgabe 5.2 Wir betrachten den Wurf eines fairen Tetraeders, markiert mit den Zahlen 1 bis 4. Wir modellieren dies wiederum mit einem Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei

$$\Omega = \{1,2,3,4\},$$

wobei jedes $\omega \in \Omega$ gleichwahrscheinlich ist.

Zeigen Sie, dass die Ereignisse

$$\begin{aligned}A &= \{1,2\}, \\ B &= \{1,3\}, \\ C &= \{1,4\}.\end{aligned}$$

paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig sind.

Lösung 5.2 Wir weisen zunächst die paarweise Unabhängigkeit nach:

Beachte, dass $|A| = |B| = |C| = 2$, damit ist $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[C] = \frac{2}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{|\{1\}|}{|\{1,2,3,4\}|} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$$
$$\mathbb{P}[A \cap C] = \frac{|\{1\}|}{|\{1,2,3,4\}|} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[C]$$
$$\mathbb{P}[B \cap C] = \frac{|\{1\}|}{|\{1,2,3,4\}|} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[C]$$

Damit sind A, B, C paarweise unabhängig. Allerdings gilt:

$$\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \frac{|\{1\}|}{|\{1,2,3,4\}|} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]\,\mathbb{P}[C],$$

damit sind A, B, C nicht unabhängig.

Aufgabe 5.3 Seien A, B und $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ Ereignisse in einer σ-Algebra $\mathcal{F}$. Nehme an, dass die A_i paarweise disjunkt sind.

(a) Zeige, dass A und B unabhängig sind genau dann, wenn A^c und B^c unabhängig sind.

(b) Zeige, falls für alle $i = 1, \dots, n$, A and A_i paarweise unabhängig sind, dass dann A und $\bigcup_{i=1}^n A_i$ unabhängig sind.

(c) Nehme an, dass $\mathbb{P}(A) = 1$ ist. Zeige, dass für alle $B \in \mathcal{F}$, A and B unabhängig sind.

Lösung 5.3

(a) Zuerst beobachten wir, dass

$$A, B \text{ sind unabhängig} \Leftrightarrow A, B^c \text{ sind unabhängig},$$

denn benutzen wir diese Äquivalenz mit A und B^c, erhalten wir, dass B^c, A unabhängig sind und auch B^c, A^c unabhängig sind. Des weiteren, da $(B^c)^c = B$, reicht es zu zeigen, dass wenn A, B unabhängig sind, dass dann auch A, B^c unabhängig sind. Wir nehmen an, dass

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

und wollen zeigen, dass das

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$$

impliziert.

Es gilt $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, und folglich $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = A \cap (B \cap B^c) = A \cap \varnothing = \varnothing$, woraus wir

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$$

schliessen.

Daraus folgern wir

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c).$$

(b) Nach Annahme haben wir $\mathbb{P}(A \cap A_i) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_i)$, $i = 1, \dots, n$. Da die Ereignisse A_i paarweise disjunkt sind, so sind es auch $A \cap A_i$. Folglich haben wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n (A \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_i)\\ &= \mathbb{P}(A)\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right), \text{was zu beweisen war.}\end{aligned}$$

(c) Mit (a) können wir zeigen, dass es ausreicht die Aussage für A^c zu zeigen, wobei $\mathbb{P}(A^c) = 0$. Für alle Ereignisse $B \in \mathcal{F}$, da $A^c \cap B \subseteq A^c$, bekommen wir mit Hilfe der Monotonie $\mathbb{P}(A^c \cap B) = 0$. Folglich ist $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$ erfüllt für jedes $B \in \mathcal{F}$. Aus der Unabhängigkeit von A^c und B folgt mit (a), dass A und B unabhängig sind.

Aufgabe 5.4 Wir betrachten ein Kartenblatt mit den üblichen 52 Karten und 4 Farben (Herz, Kreuz, Karo und Pik). Sind die folgenden Ereignisse unabängig?

(a) Wir ziehen eine Karte und betrachten die Ereignisse $A = <$ Du hast einen König gezogen $>$ und $B = <$ Du hast eine Pik-Karte gezogen $>$.

(b) Wir ziehen zwei Karten **mit Zurücklegen** und betrachten die Ereignisse $A = <$ Du ziehst ein Paar $>$ und $B = <$ Du hast zwei Herzkarten gezogen $>$. Nehme an, dass die Reihenfolge der Verteilten Karten eine Rolle spielt.

(c) Wir ziehen zwei Karten **ohne Zurücklegen** und betrachten die Ereignisse $A = <$ Du ziehst ein Paar $>$ und $B = <$ Du ziehst zwei Kreuz-Karten $>$. Nehme an, dass die Reihenfolge der Karten keine Rolle spielt.

Lösung 5.4 Wir betrachten hier nur Laplace Modelle. Folglich ist

$$|A \cap B| = \frac{|A||B|}{|\Omega|}$$

äquivalent zu

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Sei K die Menge der 52 Karten ($|K| = 52$).

(a) Wir wählen ein Laplace-Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf $\Omega = K$. Das bedeutet $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(K)$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], E \mapsto \mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{|K|}$. Zieht man nur eine Karte, dann gilt:

- $|\Omega| = 52$, da das Blatt 52 Karten enthält,
- $|A| = 4$, da das Blatt 4 Könige enthält,
- $|B| = 13$, da das Blatt 13 Pik-Karten enthält, und
- $|A \cap B| = 1$, da es nur einen Pik-König gibt.

Es folgt

$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{4 \times 13}{52} = 1 = |A \cap B|.$$

Also sind A und B unabhängig.

(b) Wir wählen ein Laplace-Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf $\Omega = K^2 = K \times K$. Das bedeutet $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}\left(K^2\right)$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], E \mapsto \mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{|E|}{|K^2|}$. Äquivalent, gilt beim Ziehen von zwei Karten:

- $|\Omega| = 52^2 = 2'704$,
- $|A| = 13 \times 4^2 = 208$, da das Paar aus allen der 13 verschieden Karten gebildet werden kann,
- $|B| = 13^2 = 169$, das es 13 Herzkarten gibt, und
- $|A \cap B| = 13 \times 1^2$, da du zweimal die selbe Herz-Karte ziehen musst (von 13 möglichen).

Wir erhalten

$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{208 \times 169}{2'704} = 13 = |A \cap B|.$$

Folglich sind A und B unabhängig.

(c) Wir wählen ein Laplace-Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf $\Omega = \{H \in \mathcal{P}(K) : |H| = 2\} = \{H \subset K : |H| = 2\}$. Das bedeutet $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], E \mapsto \mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$. Wir haben:

- $|\Omega| = \binom{52}{2} = 1'326$,
- $|A| = 13 \times \binom{4}{2} = 78$, da das Paar aus allen 13 Karten gebildet werden kann,
- $|B| = \binom{13}{2} = 78$, da es 13 verschiedene Kreuz-Karten gibt, und

- $|A \cap B| = 0$, da ohne Zurücklegen die selbe Karte nicht gezogen werden kann.

Wir beobachten
$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{78 \times 78}{1'326} \approx 4.6 \neq 0 = |A \cap B|.$$
Folglich sind A und B *nicht* unabhängig.

Aufgabe 5.5 Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $A \in \mathcal{F}$. Betrachten Sie die **Indikatorfunktion** $\mathbb{1}_A$ von A, definiert durch

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } \omega \notin A, \\ 1 & \text{if } \omega \in A. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_A$ eine Zufallsvariable ist.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $\mathbb{1}_A$

(c) Sei $B \in \mathcal{F}$ ein anderes Ereignis. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) A und B sind unabhängig,

  (ii) Die Zufallsvariablen $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ sind unabhängig.

Lösung 5.5

(a) Wir bemerken, dass wegen der Definition von $\mathbb{1}_A$ gilt:

$$\{\mathbb{1}_A \leq a\} = \{\omega \in \Omega : \mathbb{1}_A(\omega) \leq a\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } a < 0, \\ A^c, & \text{falls } 0 \leq a < 1, \\ \Omega, & \text{falls } a \geq 1, \end{cases}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$. Das bedeutet, dass $\mathbb{1}_A$ eine Zufallsvariable ist.

(b) Sei nun $a \in \mathbb{R}$. Die Verteilungsfunktion von $\mathbb{1}_A$ ist

$$F_{\mathbb{1}_A}(a) = \mathbb{P}[\{\mathbb{1}_A \leq a\}] \overset{(a)}{=} \begin{cases} \mathbb{P}[\varnothing], & \text{falls } a < 0 \\ \mathbb{P}[A^c], & \text{falls } 0 \leq a < 1 \\ \mathbb{P}[\Omega], & \text{falls } a \geq 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0 \\ 1 - \mathbb{P}[A], & \text{falls } 0 \leq a < 1 \\ 1, & \text{falls } a \geq 1 \end{cases}$$

wobei wir Proposition 1.8, *i.*, *iii.* und *P1* in Definition 1.6 verwendet haben.

(c) (i) $\Rightarrow$ (ii): Die Zufallsvariablen $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ sind unabhängig, falls für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{P}[\mathbb{1}_A \leq a, \mathbb{1}_B \leq b] = \mathbb{P}[\mathbb{1}_A \leq a]\,\mathbb{P}[\mathbb{1}_B \leq b].$$

Wir bemerken, dass nach (a) für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\{\mathbb{1}_A \leq a\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } a < 0, \\ A^c, & \text{falls } 0 \leq a < 1, \\ \Omega, & \text{falls } a \geq 1, \end{cases} \qquad \{\mathbb{1}_B \leq b\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } b < 0, \\ B^c, & \text{falls } 0 \leq b < 1, \\ \Omega, & \text{falls } b \geq 1, \end{cases}$$

Damit sind $\{\mathbb{1}_A \leq a\}$ und $\{\mathbb{1}_B \leq b\}$ stets unabhängige Ereignisse, da gilt:

- Nach Aufgabe 5.3(a) sind A und B unabhängig, so sind auch auch A^c und B^c unabhängig.
- Nach Aufgabe 5.3(c) ist Ω (mit $\mathbb{P}[\Omega] = 1$) sowohl von A^c als auch von B^c unabhängig.
- Jedes Ereignis $C \in \mathcal{F}$ (insbesondere A^c und B^c) ist von $\varnothing$ unabhängig, denn $\mathbb{P}[\varnothing \cap C] = \mathbb{P}[\varnothing] = 0 = \mathbb{P}[\varnothing]\,\mathbb{P}[C]$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Falls $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ unabhängig sind, so gilt:

$$\mathbb{P}[A^c \cap B^c] = \mathbb{P}[\mathbb{1}_A \leq 0, \mathbb{1}_B \leq 0] = \mathbb{P}[\mathbb{1}_A \leq 0]\,\mathbb{P}[\mathbb{1}_B \leq 0] = \mathbb{P}[A^c]\,\mathbb{P}[B^c]$$

und A^c und B^c sind unabhängig. Nach Aufgabe 5.3(a) sind auch A und B unabhängig.

Aufgabe 5.6

(a) Alice rolls a die (Würfel) and pays the square of the resulting number (quadrierte Augenzahl) to Bob in CHF.

i) Define a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ that describes rolling the die.

ii) Define a random variable X that describes how many CHF Bob receives, and write down its distribution (Vertailung).

iii) Calculate the expected value $\mathbb{E}[X]$.

(b) Three people each toss a fair coin. What is the probability of someone being the "odd man out"? This means that two of the players obtain the same outcome, while the third gets a different one. Please start solving this problem by defining a suitable probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Lösung 5.6

(a) i) $\Omega := \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[A] := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ with $p(\omega) := \frac{1}{6}\ \forall \omega \in \Omega$.

ii) $X : \Omega \to E := \{1,4,9,16,25,36\}$, $\omega \mapsto X(\omega) := \omega^2$.
Note: The probability distribution $(p_x)_{x\in E}$ of X is given by $p_x := \mathbb{P}[X = x] = \frac{1}{6}\ \forall x \in E$. The probability distribution (Vertailung[1]) $(p_x)_{x\in E}$ is not the same as the probability distribution function (Verteilungsfunktion[2]) F_X (but one can easily obtain one from another).

iii) From Definition 2.26 from the lecture notes we get,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in E} x\mathbb{P}[X = x] = \sum_{x\in E} x p_x = \sum_{x\in\{1,4,9,16,25,36\}} x\frac{1}{6} = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6} \approx 15.1667.$$

(b) We take a Laplace-model with $\Omega := \{H,T\}^3$, so $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$ and $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], A \mapsto \mathbb{P}[A] := \frac{|A|}{|\Omega|}$. Then $\mathbb{P}[\{\omega\}] = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ for all $\omega \in \Omega$, and so

$$\begin{aligned} p &:= \mathbb{P}[\text{one of the players is the "odd man out"}] \\ &= 1 - \mathbb{P}[\text{all 3 players get the same outcome}] \\ &= 1 - \mathbb{P}[\text{HHH or TTT}] \\ &= 1 - \mathbb{P}[\text{HHH}] - \mathbb{P}[\text{TTT}] \\ &= 1 - \frac{1}{8} \times 2 \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Here, $\mathbb{P}[\text{HHH}] = \mathbb{P}[\text{TTT}] = \frac{1}{|\Omega|}$, where $|\Omega| = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$, the number of all possible outcomes for the 3 tosses.

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an Jakob Heiss.

[1] Die Vertailung $(p_x)_{x\in E}$ wird in der Literatur häufig auch als Wahrscheinlichkeitsverteilung, (Wahrscheinlichkeits-)Gewichtsfunktion, (Wahrscheinlichkeits-)Gewicht(ung) oder als diskrete (Wahrscheinlichkeits-)Dichte (oder als Radon-Nikodým-Dichte bezüglich des Zählmasses) bezeichnet.

[2] Die Verteilungsfunktion F_X wird in der Literatur häufig auch als Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion, kumulative (Wahrscheinlichkeits-)Verteilungsfunktion, **c**umulative (probability) **d**istribution **f**unction, cdf oder CDF bezeichnet.