Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lösungen Serie 6

Version 2 (19. April 2021: Doppeldeutige Notation $2^{\mathbb{N}}$ vermieden. In der Literatur kann $2^{\mathbb{N}}$ sowohl für die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ als auch für die Menge $\{ 2^n : n \in \mathbb{N} \}$ stehen. Diese beiden Mengen sind sehr verschieden, darum wird in der neuen Version von Aufgabe 6.4 und dessen Lösung die Notation Notation $2^{\mathbb{N}}$ vermieden.); Version 1.2 (14. April: Datum der nächsten Übung auf 26. April korrigiert, wegen Sechseläuten. V1.1: Rechtschreibung und Verlinkung)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum des Moodle-Kurs und/oder (anonym) in diesem file `https://docs.google.com/document/d/1AhLJZNTRsgkoC9Bmszy8kbYfTxFrEYZnSXGlSlm_0zc/edit?usp=sharing`

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann auf `https://sam-up.math.ethz.ch/` hochzuladen oder selbst mit dieser Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **26. April**, **am 19. April findet keine Übung statt wegen Sechseläuten**.

Aufgabe 6.1 Eine faire Münze wird dreimal geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl geworfener „Köpfe“ in den ersten beiden Würfen. Die Zufallsvariable Y beschreibt die Anzahl geworfener „Köpfe“ im letzten Wurf. Berechnen Sie die Verteilung von X, Y, $X+Y$, und $X-Y$.

Lösung 6.1 X hat eine Binomialverteilung der Länge $n = 2$ mit Erfolgsparameter $p = 1/2$, also $X \sim \mathrm{Bin}(2,1/2)$. Das heisst

$$\mathbb{P}[X=0] = 1/4, \qquad \mathbb{P}[X=1] = 1/2 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X=2] = 1/4.$$

Y hat eine Bernoulliverteilung mit Erfolgsparameter $p = 1/2$, also $Y \sim \mathrm{Ber}(1/2)$. Oder anders ausgedrückt, Y hat eine Binomialverteilung der Länge $n = 1$ mit Erfolgsparameter $p = 1/2$, also $Y \sim \mathrm{Bin}(1,1/2)$. Das heisst,

$$\mathbb{P}[Y=0] = 1/2 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[Y=1] = 1/2.$$

Die Zufallsvariable $X+Y$ beschreibt die Anzahl geworfener „Köpfe“ in den drei Würfen. Also ist $X+Y \sim \mathrm{Bin}(3,1/2)$. Die Verteilung von $Z := X-Y$ ist gegeben durch

$$\mathbb{P}[Z=-1] = 1/8, \quad \mathbb{P}[Z=0] = 3/8, \quad \mathbb{P}[Z=1] = 3/8, \quad \mathbb{P}[Z=2] = 1/8.$$

Um diese Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, haben wir die Unabhängigkeit von X und Y benutzt. Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z=1] &= \mathbb{P}[X=1, Y=0] + \mathbb{P}[X=2, Y=1] \\ &= \mathbb{P}[X=1] \cdot \mathbb{P}[Y=0] + \mathbb{P}[X=2] \cdot \mathbb{P}[Y=1] = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Analog wurden die weiteren Wahrscheinlichkeiten berechnet.

Aufgabe 6.2 Die Anzahl Y defekter Stellen auf einem Chip sei poissonverteilt mit Parameter λ. Sei X die Anzahl der Fehler in einem bestimmten Teilgebiet des Chips. Wir nehmen an, dass sich jeder der insgesamt Y Fehler unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ in diesem Teilgebiet befindet.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von X und die von $Y-X$.

(b) Sind X und $Y-X$ unabhängig?

Lösung 6.2

(a) Es ist für $j \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X=j] &= \sum_{k\geq j} \mathbb{P}[X=j, Y=k] = \sum_{k\geq j} \mathbb{P}[X=j \mid Y=k] \cdot \mathbb{P}[Y=k] \\
&= \sum_{k\geq j} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(k+j)!}{j!k!} p^j (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^j}{j!} \sum_{k\geq 0} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^j}{j!} e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Also ist X poissonverteilt mit Parameter $p\lambda$. Ebenso ist $Y-X$ poissonverteilt mit Parameter $(1-p)\lambda$, denn für $j \geq 0$,

$$\mathbb{P}[Y-X=j] = \sum_{k\geq j} \mathbb{P}[X=k-j, Y=k] = e^{-(1-p)\lambda} \frac{((1-p)\lambda)^j}{j!},$$

wobei die letzte Gleichung analog folgt.
Bemerkung: $Y-X$ beschreibt die Anzahl Defekte, die sich *nicht* im Teilgebiet befinden. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Defekt nicht im Teilgebiet befindet, ist $1-p$.

(b) Für $k, j \geq 0$ ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y-X=k, X=j] &= \mathbb{P}[Y=k+j, X=j] = \mathbb{P}[X=j \mid Y=k+j] \cdot \mathbb{P}[Y=k+j] \\
&= \binom{k+j}{j} p^j (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \\
&= \frac{1}{j!k!} p^j (1-p)^k e^{-p\lambda} e^{-(1-p)\lambda} \lambda^k \lambda^j \\
&= \left(e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^j}{j!}\right) \cdot \left(e^{-(1-p)\lambda} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!}\right) \\
&= \mathbb{P}[X=j] \cdot \mathbb{P}[Y-X=k].
\end{aligned}$$

Folglich sind X und $Y-X$ unabhängig.

Aufgabe 6.3 Ein Nachrichtenkanal überträgt binäre Codewörter zu je 1024 Bits. Die einzelnen Bits werden unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = 10^{-3}$ falsch übertragen. Ein Wort wird *genau dann* richtig decodiert, *wenn* es höchstens drei falsch übermittelte Bits enthält. Es bezeichne X die Anzahl falsch übertragener Bits in einem Codewort.

(a) Welche Verteilung besitzt X ?

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Codewort richtig decodiert wird. Dazu ist die passende Approximation der Verteilung von X zu verwenden.

(c) Eine Meldung bestehend aus 10 Wörtern wird übermittelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Wort falsch decodiert wird.

Lösung 6.3

(a) X ist binomialverteilt mit Parametern $n = 1024$ und $p = 10^{-3}$, d.h.

$$\mathbb{P}[X=k] = \binom{1024}{k} 0.001^k\ 0.999^{1024-k} \quad \text{für } k = 0, \ldots, 1024.$$

(b) Da $n = 1024$ relativ gross und $p = 10^{-3}$ relativ klein ist, ist X approximativ poissonverteilt mit Parameter $\lambda = np = 1024 \cdot 0.001 = 1.024$, d.h.

$$\mathbb{P}[X=k] \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Diese Näherung hat den Vorteil, dass sie sich, besonders für grosses k, leichter berechnen lässt als der exakte Wert. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Codewort richtig decodiert wird, ist somit

$$\mathbb{P}[X \leq 3] = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}[X = k] \approx e^{-\lambda}\big(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6}\big) = 0.97950487\ldots$$

(c) Die Anzahl Y falsch decodierter Wörter ist (mit der in Aufgabe (b) vorgenommenen Näherung) ungefähr Binomial$(10, 1 - 0.9795)$ verteilt. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\mathbb{P}[Y \geq 1] = 1 - \mathbb{P}[Y = 0] \approx 1 - \binom{10}{0} 0.0205^0 \, 0.9795^{10} = 0.187\ldots$$

Aufgabe 6.4

(a) Construct a discrete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ and discrete random variables $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ on it, such that

i) $\mathbb{P}[X < \infty] = 1$ and $\mathbb{E}[X] = \infty$.

ii) $\mathbb{E}[Y] < \infty$ and $\mathbb{E}\left[Y^2\right] = \infty$.

(b) Is it possible to construct on a discrete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a discrete random variable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ such that $\mathbb{E}[Z] = \infty$ and $\mathbb{E}\left[Z^2\right] < \infty$?

Lösung 6.4

(a) For example we can choose $\Omega := \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[A] := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ with $p(\omega) := 2^{-\omega}$ $\forall \omega \in \Omega$. $\mathbb{P}$ is indeed a probability measure as $\mathbb{P}[\Omega] = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} 2^{(-\omega)} = 1$ adds up to one as a geometric series.

i) $X : \Omega \to E,\ \omega \mapsto X(\omega) := 2^{\omega}$, where $E := \{\, 2^n : n \in \mathbb{N}\,\}$. Thus $X(\omega) < \infty$ for all $\omega \in \Omega$. Therefore, $\mathbb{P}[X < \infty] = \mathbb{P}[\Omega] = 1$. Further, using Definition 2.26 from the lecture notes, we get

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}[X = x] = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} X(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \underbrace{2^{\omega} 2^{-\omega}}_{=1} = \infty.$$

ii) $Y : \Omega \to \tilde{E},\ \omega \mapsto Y(\omega) := \left(\frac{3}{2}\right)^{\omega}$, where $\tilde{E} := \left\{\, \left(\frac{3}{2}\right)^n : n \in \mathbb{N}\,\right\}$. Then, we get

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^{\omega} 2^{-\omega}}_{=\left(\frac{3}{4}\right)^{\omega}} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 3 < \infty,$$

because $\frac{3}{4} < 1$. Using the same definition for Y^2, we get

$$\mathbb{E}\left[Y^2\right] = \sum_{\omega \in \Omega} Y^2(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(\frac{3^2}{2^2}\right)^{\omega} 2^{-\omega}}_{=\left(\frac{9}{8}\right)^{\omega}} = \infty,$$

because $\frac{9}{8} > 1$.

Alternative solution: For example we can choose $\Omega := \mathbb{N}$, $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[A] := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ with $p(\omega) := \frac{90}{\omega^4 \pi^2}$ $\forall \omega \in \Omega$. $\mathbb{P}$ is indeed a probability measure as $\mathbb{P}[\Omega] = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \frac{90}{\omega^4 \pi^2} = 1$ adds up to one as an over-harmonic series.

i) $X : \Omega \to E,\ \omega \mapsto X(\omega) := \omega^4$, where $E := \left\{\, n^4 : n \in \mathbb{N}\,\right\}$. Thus $X(\omega) < \infty$ for all $\omega \in \Omega$. Therefore, $\mathbb{P}[X < \infty] = \mathbb{P}[\Omega] = 1$. Further, we get

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}} \underbrace{\omega^4 \frac{90}{\omega^4 \pi^2}}_{=\frac{90}{\pi^2}} = \infty$$

ii) $Y : \Omega \to \tilde{E},\ \omega \mapsto Y(\omega) := \omega^2$, where $\tilde{E} := \left\{ n^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$. Then, we get

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)p(\omega) = \sum_{\omega\in\mathbb{N}} \underbrace{\omega^2 \frac{90}{\omega^4\pi^2}}_{=\frac{90}{\omega^2\pi^2}} = \frac{\pi^2}{6}\frac{90}{\pi^2} = 15 < \infty.$$

Using the same definition for Y^2, we get

$$\mathbb{E}\left[Y^2\right] = \sum_{\omega\in\Omega} Y^2(\omega)p(\omega) = \sum_{\omega\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(\omega^2\right)^2 \frac{90}{\omega^4\pi^2}}_{=\frac{90}{\pi^2}} = \infty.$$

(b) This is not possible, as mentioned in Remark 2.41, which follows directly from Jensen's inequality (Theorem 2.37) in the lecture notes.

Aufgabe 6.5 Gegeben seien $\lambda > 0$ und eine Zufallsvariable X mit Werten in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und

$$\mathbb{P}[X = n] = c\frac{\lambda^n}{n!} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Es sei Y eine von X unabhängige Zufallsvariable, die poissonverteilt mit Parameter λ ist, d.h.

$$\mathbb{P}[Y = n] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Geben Sie zu jedem der folgenden Ausdrücke an, ob er gleich oder ungleich $\mathbb{P}[X = n]$ ist, wobei $n \in \mathbb{N}$.

(**A**) $\mathbb{P}[X = Y \mid Y = n]$
(**B**) $\mathbb{P}[0 \neq Y = n]$
(**C**) $\mathbb{P}[Y = n \mid Y \neq 0]$
(**D**) $\mathbb{P}[Y \neq 0 \mid Y = n]$
(**E**) $\mathbb{P}[X = n \mid Y = 0]$

Lösung 6.5

(a) Es muss

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X = n] = \sum_{n=1}^{\infty} c\frac{\lambda^n}{n!} = c\left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\right) = c(e^\lambda - 1)$$

gelten, also

$$c = \frac{1}{e^\lambda - 1}.$$

(b) Es ist

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}[X = n] = \sum_{n=1}^{\infty} c\frac{\lambda^n}{(n-1)!} = c\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = c\lambda e^\lambda = \frac{\lambda e^\lambda}{e^\lambda - 1}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2\mathbb{P}[X = n] = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c\frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} nc\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= c\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n-2)!} + \mathbb{E}[X] = c\lambda^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} + \mathbb{E}[X] \\
&= c\lambda^2 e^\lambda + c\lambda e^\lambda = \frac{e^\lambda\lambda(\lambda+1)}{e^\lambda - 1}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{e^\lambda\lambda(e^\lambda - \lambda - 1)}{(e^\lambda - 1)^2}.$$

(c)

$$(\mathbf{A}) \qquad \mathbb{P}[X = Y \mid Y = n] = \frac{\mathbb{P}[X = Y = n]}{\mathbb{P}[Y = n]} = \frac{\mathbb{P}[X = n, Y = n]}{\mathbb{P}[Y = n]}$$

$$\overset{\text{unabh.}}{=} \frac{\mathbb{P}[X = n] \cdot \mathbb{P}[Y = n]}{\mathbb{P}[Y = n]} = \mathbb{P}[X = n],$$

$$(\mathbf{B}) \qquad \mathbb{P}[0 \neq Y = n] = \mathbb{P}[Y = n] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \neq \mathbb{P}[X = n], \qquad (\text{da } c \neq e^{-\lambda})$$

$$(\mathbf{C}) \qquad \mathbb{P}[Y = n \mid Y \neq 0] = \frac{\mathbb{P}[0 \neq Y = n]}{\mathbb{P}[Y \neq 0]} = \frac{\mathbb{P}[Y = n]}{1 - \mathbb{P}[Y = 0]}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!(1 - e^{-\lambda})} = c\frac{\lambda^n}{n!} = \mathbb{P}[X = n],$$

$$(\mathbf{D}) \qquad \mathbb{P}[Y \neq 0 \mid Y = n] = \frac{\mathbb{P}[0 \neq Y = n]}{\mathbb{P}[Y = n]} = \frac{\mathbb{P}[Y = n]}{\mathbb{P}[Y = n]} = 1 \neq \mathbb{P}[X = n],$$

$$(\mathbf{E}) \qquad \mathbb{P}[X = n \mid Y = 0] = \frac{\mathbb{P}[X = n, Y = 0]}{\mathbb{P}[Y = 0]} \overset{\text{unabh.}}{=} \frac{\mathbb{P}[X = n] \cdot \mathbb{P}[Y = 0]}{\mathbb{P}[Y = 0]} = \mathbb{P}[X = n].$$

Also sind (**A**),(**C**) und (**E**) gleich $\mathbb{P}[X = n]$, (**B**) und (**D**) hingegen nicht.

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an Jakob Heiss.