Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lösungen Serie 7

Version 1 (25. April 2021)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum des Moodle-Kurs und/oder (anonym) in diesem file `https://docs.google.com/document/d/1AhLJZNTRsgkoC9Bmszy8kbYfTxFrEYZnSXGlSlm_0zc/edit?usp=sharing`

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann auf `https://sam-up.math.ethz.ch/` hochzuladen oder selbst mit dieser Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der Übung am **3. Mai**.

Aufgabe 7.1 k Jäger schiessen gleichzeitig je einmal auf einen Schwarm aus m Enten. Sie suchen sich unabhängig voneinander die Ente aus, auf die sie zielen, und treffen diese unabhängig voneinander und unabhängig von der Wahl der Ente mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$.

Führen Sie für jede Ente $n \leq m$ eine Zufallsvariable X_n ein, die angibt, ob die Ente getroffen wurde oder nicht. D.h. es soll gelten $\{X_n = 1\} = \{n\text{-te Ente nicht getroffen}\}$ und $\{X_n = 0\} = \{n\text{-te Ente getroffen}\}$.

(a) Welche Verteilung hat X_n für $n = 1, \ldots, m$?

(b) Wie gross ist die erwartete Anzahl unverletzter Enten?

(c) Sind die Ereignisse $\{X_n = 0\}$, $n = 1, \ldots, m$ unabhängig? Untersuchen Sie nur den Fall $k < m$.

Lösung 7.1

(a) X_n kann nur Werte in $\{0, 1\}$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die n-te Ente vom ℓ-ten Jäger *nicht* getroffen wird, ist $1 - p/m$. Da die Jäger unabhängig voneinander schiessen, beträgt für die n-te, und deswegen für jede Ente die Chance, unverletzt davonzukommen,

$$\mathbb{P}[X_n = 1] = \left(1 - \frac{p}{m}\right)^k. \tag{1}$$

Also sind alle X_n Binomial-verteilt mit Parametern $\tilde{n} = 1$ und $\tilde{p} = (1 - p/m)^k$, also Bernoulli verteilt mit Parameter $\tilde{p}$.

(b) Die Gesamtzahl X aller nicht verletzten Enten ist gleich $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$. Aufgrund der Linearität des Erwartungswertes gilt

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \ldots + \mathbb{E}[X_m]. \tag{2}$$

Da die X_n Indikatorvariablen sind, gilt $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{P}[X_n = 1] = (1 - p/m)^k$ für alle $n = 1, \ldots, m$ und somit

$$\mathbb{E}[X] = m\left(1 - \frac{p}{m}\right)^k.$$

(c) Wir betrachten nur den Fall $k < m$, also weniger Jäger als Enten. Dann sind $X_1, \ldots, X_m$ **nicht** unabhängig, weil

$$\mathbb{P}[X_1 = \ldots = X_m = 0] = 0 < \left(1 - \left(1 - \frac{p}{m}\right)^k\right)^m = \prod_{n=1}^{m} \mathbb{P}[X_n = 0].$$

Bemerkung: Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_m$ sind auch **nicht** unabhängig, wenn $k \geq m$ und $m > 1$. Insbesondere ist X nicht Binomial-verteilt.

Aufgabe 7.2 In einer Urne sind N weisse und M schwarze Kugeln. Es werden $n \leq N + M$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Sei X die Anzahl gezogener weisser Kugeln.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von X.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
Hinweis: Benützen Sie die Linearität des Erwartungswertes.

Lösung 7.2 Sei X die Anzahl gezogener weisser Kugeln.

(a) Für $0 \leq k \leq N,\ 0 \leq n-k \leq M$ gilt

$$\mathbb{P}[X=k] = \frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}.$$

Für alle übrigen k ist $\mathbb{P}[X=k]=0$.

(b) Wir nummerieren die weissen Kugeln von 1 bis N. Dann können wir X als Summe von Indikatorfunktionen schreiben:

$$X = X_1 + \ldots + X_N,$$

wobei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{die weisse Kugel Nr. } i \text{ wird gezogen,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{P}[X_i = 1] = \frac{1 \cdot \binom{M+N-1}{n-1}}{\binom{M+N}{n}} = \frac{n}{M+N}.$$

Es folgt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{Nn}{M+N}.$$

Aufgabe 7.3 Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y, welche nur die Werte 0 und 1 annehmen können. Für die Verteilung von (X,Y) sollen folgende Bedingungen gelten:

$$P[X=0]=1/2, \quad P[Y=0]=1/3 \text{ und } P[X=0,Y=0]=p.$$

(a) Welche Werte darf p annehmen und für welche Werte von p sind X und Y unabhängig?

(b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[XY]$ sowie die Varianzen σ_X^2 und σ_Y^2 als Funktion von p. Wann gilt $\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$?

(c) Finden Sie ein Beispiel von Zufallsvariablen U und V so, dass $\mathbb{E}[UV]=\mathbb{E}[U]\,\mathbb{E}[V]$ aber mit U und V nicht unabhängig.

Lösung 7.3

(a) Die Verteilung von (X,Y) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X=0,Y=0] &= p, \\
\mathbb{P}[X=0,Y=1] &= \mathbb{P}[X=0] - \mathbb{P}[X=0,Y=0] = 1/2 - p, \\
\mathbb{P}[X=1,Y=0] &= \mathbb{P}[Y=0] - \mathbb{P}[X=0,Y=0] = 1/3 - p, \\
\mathbb{P}[X=1,Y=1] &= 1 - \mathbb{P}[X=0,Y=0] - \mathbb{P}[X=0,Y=1] - \mathbb{P}[X=1,Y=0] \\
&= 1/6 + p.
\end{aligned}$$

Da die obigen Ausdrücke Wahrscheinlichkeiten sind, müssen ihre Wert zwischen 0 und 1 liegen. Folglich darf p nur Werte zwischen 0 und 1/3 annehmen. Andererseits, falls $p \in [0,1/3]$, dann sind $\sum_\omega \mathbb{P}[\{\omega\}] = 1$ und $\mathbb{P}[\{\omega\}] \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ erfüllt.
Die Zufallsvariablen X und Y sind genau dann unabhängig, wenn für alle $i,j=0,1$

$$\mathbb{P}[X=i,Y=j] = \mathbb{P}[X=i] \cdot \mathbb{P}[Y=j]$$

erfüllt ist. Also genau dann, wenn $p=1/6$ ist.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 0 \cdot \mathbb{P}[X=0] + 1 \cdot \mathbb{P}[X=1] = 1 - 1/2 = 1/2, \\
\mathbb{E}[Y] &= 0 \cdot \mathbb{P}[Y=0] + 1 \cdot \mathbb{P}[Y=1] = 1 - 1/3 = 2/3, \\
\mathbb{E}[XY] &= 0 \cdot \mathbb{P}[XY=0] + 1 \cdot \mathbb{P}[XY=1] = \mathbb{P}[X=1,Y=1] = 1/6 + p.
\end{aligned}$$

Da X und Y nur die Werte 0 oder 1 annehmen, gilt $X^2 = X$ und $Y^2 = Y$. Somit hat man

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2 = 1/4, \\ \sigma_Y^2 &= \mathbb{E}\left[Y^2\right] - \mathbb{E}\left[Y\right]^2 = 2/9. \end{aligned}$$

$\mathbb{E}\left[XY\right] = \mathbb{E}\left[X\right] \cdot \mathbb{E}\left[Y\right]$ gilt hier genau dann, wenn $p = 1/6$ erfüllt ist (also genau dann, wenn X und Y unabhängig sind).

(c) Ein einfaches Beispiel ist das Folgende: Sei U eine diskrete Zufallsvariable, welche die Werte $-1, 0, 1$ je mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ annimmt. Setze dann $V := U^2$. Intuitiv sind U und V nicht unabhängig. Formal sieht man, dass

$$\mathbb{P}\left[U = 1, V = 1\right] = \mathbb{P}\left[U = 1, U^2 = 1\right] = \mathbb{P}\left[U = 1\right] = \frac{1}{3} \neq \mathbb{P}\left[U = 1\right] \mathbb{P}\left[V = 1\right].$$

Also sind U und V effektiv nicht unabhängig. Wie man leicht zeigt, gilt jedoch $\mathbb{E}\left[UV\right] = \mathbb{E}\left[U\right] \mathbb{E}\left[V\right]$, denn offenbar ist $\mathbb{E}\left[U^3\right] = \mathbb{E}\left[U\right]$ und $\mathbb{E}\left[U\right] = 0$.

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an Jakob Heiss.