Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Lösungen Serie 9

Version 4 (7. Juni 2021): Lösung 9.3(b) korrigiert; Version 3 (29. Mai): Nummerierung der Unteraufgaben von Aufgabe 9.3 korrigiert; Version 2 (21. Mai): Tabelle der Standardnormalverteilung hinzugefügt; Version 1 (19. Mai)

Bitte stellt Fragen in den Übungen und/oder im Forum des Moodle-Kurs und/oder (anonym) in diesem file `https://docs.google.com/document/d/1AhLJZNTRsgkoC9Bmszy8kbYfTxFrEYZnSXGlSlm_0zc/edit?usp=sharing`

Wir empfehlen die Aufgaben selbständig zu lösen und dann auf `https://sam-up.math.ethz.ch/` hochzuladen oder selbst mit dieser Lösung zu vergleichen am besten rechtzeitig vor der letzten Übung am **31. Mai**.

Aufgabe 9.1 Herr Meier fährt täglich mit konstanter Geschwindigkeit dieselbe Strecke s_0 (zum Beispiel von Zürich nach Bern, $s_0 = 120$ km). Die Geschwindigkeit V hängt vom Wetter und den Verkehrsbedingungen ab, und ihre Dichte ist von der Form

$$f_V(v) = \begin{cases} C\, v^2\, e^{-\lambda v}, & \text{falls } v \geq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und dem Mittel $\mathbb{E}[V] = v_0$ (zum Beispiel $v_0 = 90$ km/h).

(a) Bestimmen Sie die Werte der Parameter C und λ .
HINWEIS: Benützen Sie $\int_0^\infty t^n\, e^{-t}\, dt = n!$.

(b) Berechnen Sie die Varianz von V.

(c) Die Fahrzeit ist $T = s_0/V$. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von T.

Lösung 9.1

(a) Es muss gelten $\int_0^\infty f_V(v)dv = 1$ und $\mathbb{E}[V] = \int_0^\infty v f_V(v)dv = v_0$. Also erhalten wir mit dem Hinweis in der Aufgabe,

$$1 = \int_0^\infty C v^2 e^{-\lambda v} dv \overset{x=\lambda v}{=} C \int_0^\infty \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 e^{-x} \frac{dx}{\lambda} = \frac{C}{\lambda^3} 2!.$$

Es folgt $C = \frac{\lambda^3}{2}$, wobei wir $\lambda > 0$ annehmen. Mit der selben Substitution folgt

$$v_0 = \mathbb{E}[V] = \frac{\lambda^3}{2} \int_0^\infty v^3 e^{-\lambda v} dv = \frac{\lambda^3}{2} \int_0^\infty \left(\frac{x}{\lambda}\right)^3 e^{-x} \frac{dx}{\lambda} = 3! \frac{1}{2\lambda} = 3/\lambda.$$

Es gilt daher $\lambda = 3/v_0$. Bemerke zudem, dass $f_V \geq 0$ gilt, da $C > 0$.

(b)

$$\begin{aligned} \sigma_V^2 = \mathbb{E}\left[V^2\right] - \mathbb{E}[V]^2 &= \frac{\lambda^3}{2} \int_0^\infty v^4 e^{-\lambda v} dv - (3/\lambda)^2 \\ &= 4! \frac{1}{2\lambda^2} - 9/\lambda^2 = 3/\lambda^2 = \frac{v_0^2}{3}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[s_0/V] = s_0 \mathbb{E}[1/V] &= s_0 \int_0^\infty 1/v f_V(v) dv \\ &= s_0 \int_0^\infty \frac{\lambda^3}{2} v e^{-\lambda v} dv = \frac{s_0 \lambda}{2} = \frac{3 s_0}{2 v_0}. \end{aligned}$$

Beachte, dass $\mathbb{E}[1/V] \neq 1/\mathbb{E}[V]$, also $\mathbb{E}[T] \neq s_0/v_0$.

$$\sigma_T^2 = \mathbb{E}\left[T^2\right] - \mathbb{E}[T]^2 = \mathbb{E}\left[\frac{s_0^2}{V^2}\right] - \left(\frac{s_0\lambda}{2}\right)^2 = \frac{s_0^2\lambda^3}{2}\int_0^\infty e^{-\lambda v}dv - \left(\frac{s_0\lambda}{2}\right)^2$$
$$= \frac{s_0^2\lambda^2}{2} - \frac{s_0^2\lambda^2}{4} = \frac{s_0^2\lambda^2}{4} = \frac{9s_0^2}{4v_0^2}.$$

Aufgabe 9.2 Die Zufallsvariable X besitze eine Standardnormalverteilung, die Zufallsvariable Y sei normalverteilt mit Erwartungswert -0.2 und Standardabweichung 3. Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabelle im Anhang die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}[X < -1.01], \quad \mathbb{P}[-3.02 < X \leq 1], \quad \mathbb{P}[Y \leq 8.8], \quad \mathbb{P}[0.43 \leq |Y| < 1.54].$$

Lösung 9.2 Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X < -1.01] &= \mathbb{P}[X > 1.01] = 1 - \Phi(1.01) \approx 1 - 0.8438 = 0.1562,\\
\mathbb{P}[-3.02 < X \leq 1] &= \mathbb{P}[X \leq 1] - \mathbb{P}[X \leq -3.02] = \Phi(1) - \mathbb{P}[X \geq 3.02]\\
&= \Phi(1) - (1 - \Phi(3.02)) \approx 0.8413 - 1 + 0.998736 \approx 0.8400.
\end{aligned}$$

Da

$$\frac{Y - E[Y]}{\sigma_Y} = \frac{Y + 0.2}{3}$$

standardnormalverteilt ist, sind

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y \leq 8.8] &= \mathbb{P}[Y + 0.2 \leq 9] = \mathbb{P}\left[\frac{Y+0.2}{3} \leq 3\right] = \Phi(3) \approx 0.998650,\\
\mathbb{P}[0.43 \leq |Y| < 1.54] &= \mathbb{P}[0.43 \leq Y < 1.54] + \mathbb{P}[-1.54 < Y \leq -0.43]\\
&= \mathbb{P}\left[\frac{0.43+0.2}{3} \leq \frac{Y+0.2}{3} < \frac{1.54+0.2}{3}\right]\\
&\quad +\mathbb{P}\left[\frac{-1.54+0.2}{3} \leq \frac{Y+0.2}{3} < \frac{-0.43+0.2}{3}\right]\\
&= \Phi(0.58) - \Phi(0.21) + \Phi(-0.07\bar{6}) - \Phi(-0.44\bar{6})\\
&\approx 0.7190 - 0.5832 + (1 - 0.5305) - (1 - 0.6724) = 0.2777,
\end{aligned}$$

wobei $\Phi(0.07\bar{6})$ und $\Phi(0.44\bar{6})$ durch Interpolation von Tabellenwerten gewonnen wurden.

Aufgabe 9.3 Frau A und Herr B wollen sich treffen und verabreden sich für 16 Uhr in einem Café. Mit T_A bzw. T_B bezeichnen wir die Differenz zwischen der tatsächlichen Ankunftszeit von A bzw. B und 16 Uhr in Minuten. Wenn z.B. das Ereignis $\{T_A \leq -5\}$ eintritt, so bedeutet dies, dass A spätestens um 15:55 Uhr ankommt. T_A und T_B seien unabhängige Zufallsvariablen. Wir nehmen an, dass $T_A \sim \mathcal{N}(0, 3^2)$ und $T_B \sim \mathcal{N}(-6, 4^2)$, wobei $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ eine Normalverteilung mit Erwartungswert m und Varianz σ^2 beschreibt.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass B vor 16 Uhr im Café eintrifft?

Im Folgenden nehmen wir die Tatsache an, dass wenn $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ unabhängig sind, dann ist $X + Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2\right)$.

(b) Wie ist $X = T_A - T_B$ verteilt?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft A vor B ein?

(d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und B innerhalb einer Minute ankommen?

(e) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zeit, die die zuerst eintreffende Person auf die andere Person warten muss.

Lösung 9.3 Sei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

(a) Da $T_B \sim \mathcal{N}(-6, 4^2)$, ist $(T_B+6)/4$ standardnormalverteilt. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[T_B < 0] = \mathbb{P}\left[\frac{T_B+6}{4} < \frac{6}{4}\right] = \Phi(6/4) = 0.9332,$$

wie der Tabelle zu entnehmen ist.

(b) Die Zufallsvariable $-T_B$ ist $\mathcal{N}(6,4^2)$-verteilt, da T_B $\mathcal{N}(-6,4^2)$-verteilt ist. Da T_A und $-T_B$ unabhängig voneinander sind, ist $X = T_A - T_B$ auch wieder normalverteilt, und zwar mit Erwartungswert $0+6=6$ und Standardabweichung $\sqrt{3^2+4^2}=5$, also $X = T_A - T_B \sim \mathcal{N}(6,5^2)$.

(c) Gesucht ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[T_A < T_B\right] &= \mathbb{P}\left[X<0\right] = \mathbb{P}\left[\frac{X-6}{5} < \frac{-6}{5}\right] \\ &= \Phi(-6/5) = 1-\Phi(6/5) = 1-0.8849 = 0.1151,\end{aligned}$$

wobei wir $\Phi(-z) = 1-\Phi(z)$ verwendet haben.

(d)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[|X| \le 1\right] &= \mathbb{P}\left[-1 < X < 1\right] = \mathbb{P}\left[-\frac{7}{5} < \frac{X-6}{5} < -1\right] = \Phi(-1) - \Phi(-7/5) \\ &= (1-0.8413) - (1-0.9192) = 0.0779.\end{aligned}$$

(e) Zu berechnen ist $\mathbb{E}\left[|X|\right]$. Da $X \sim \mathcal{N}(6,5^2)$, gilt $X = 5Y+6$, wobei Y eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Demzufolge ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X|\right] &= \mathbb{E}\left[|5Y+6|\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |5s+6| \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-6/5}^{\infty} (5s+6) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-6/5} (5s+6) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds \\ &= \frac{5}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-6/5}^{\infty} s \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds - \int_{-\infty}^{-6/5} s \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds \right) \\ &\quad + 6 \left(\int_{-6/5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds - \int_{-\infty}^{-6/5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds \right) \\ &= \frac{5}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\right]_{-6/5}^{\infty} - \left[-\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\right]_{-\infty}^{-6/5} \right) \\ &\quad + 6\big((1-\Phi(-6/5)) - \Phi(-6/5)\big) \\ &= \frac{10}{\sqrt{2\pi}} \exp(-36/50) + 6\left(1-2\Phi(-6/5)\right) \;=\; 6.561.\end{aligned}$$

Wenn du Feedback zum Übungszettel hast, schreibe bitte eine Mail an Jakob Heiss.

Tabelle der Standardnormalverteilung

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Zum Beispiel ist $\mathbb{P}[Z \leq 1.96] = 0.975$.