

Runge-Kutta Verfahren

Ein s-stufiges Runge-Kutta (Einschritt-) Verfahren (RK-ESV) ist definiert durch

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot \sum_{i=1}^s b_i \cdot k_i$$

wobei die Stufen/Steigungen

$$k_i = f\left(t_j + c_i \cdot h, y_j + h \cdot \sum_{l=1}^s a_{il} \cdot k_l\right)$$

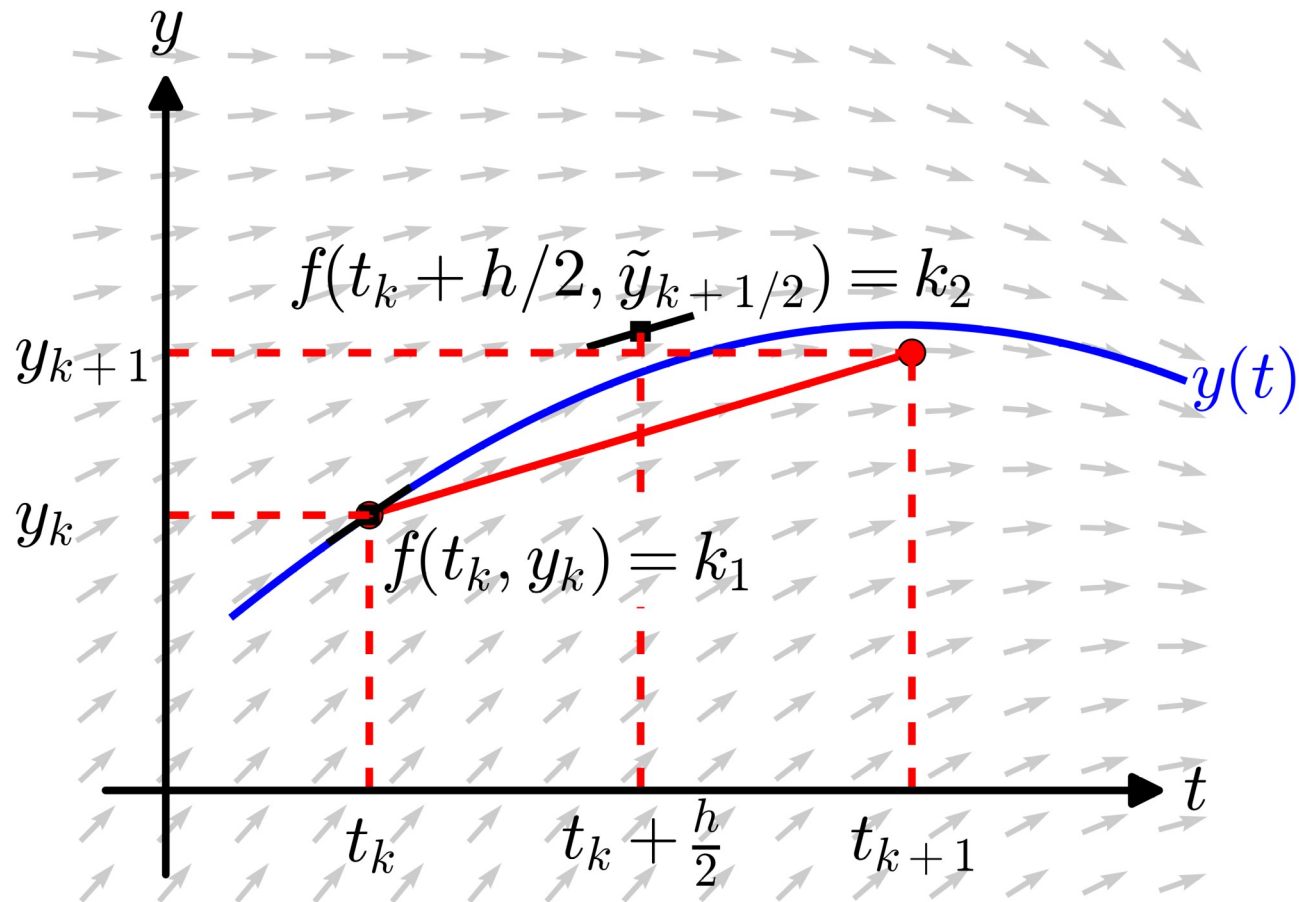
sind. Weiter nennt man

s	...	Anzahl Stufen
c_i	...	Knoten
b_i	...	Gewichte
a_{il}	...	Runge-Kutta Matrix / Koeffizienten

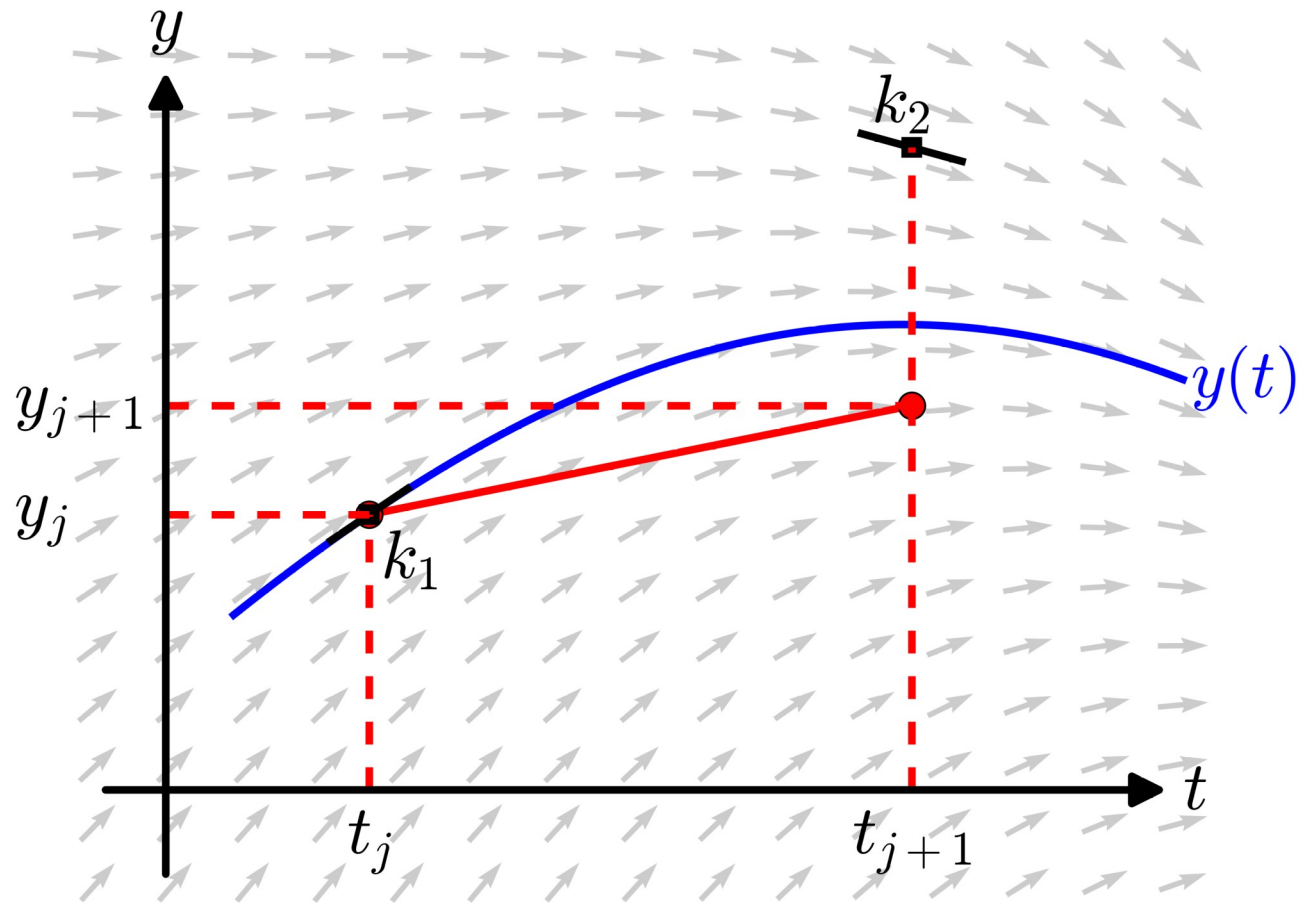
RL Verfahren schreibt man am besten
in einem sog. Butcher-Tableau (BT)

$$\begin{array}{c|ccc}
 c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\
 c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\
 \vdots & & & & \\
 \vdots & & & & \\
 c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_s
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c|c}
 \vec{c} & A \\
 \hline
 & \vec{b}^T \\
 & \uparrow \\
 & \text{transponiert}
 \end{array}$$

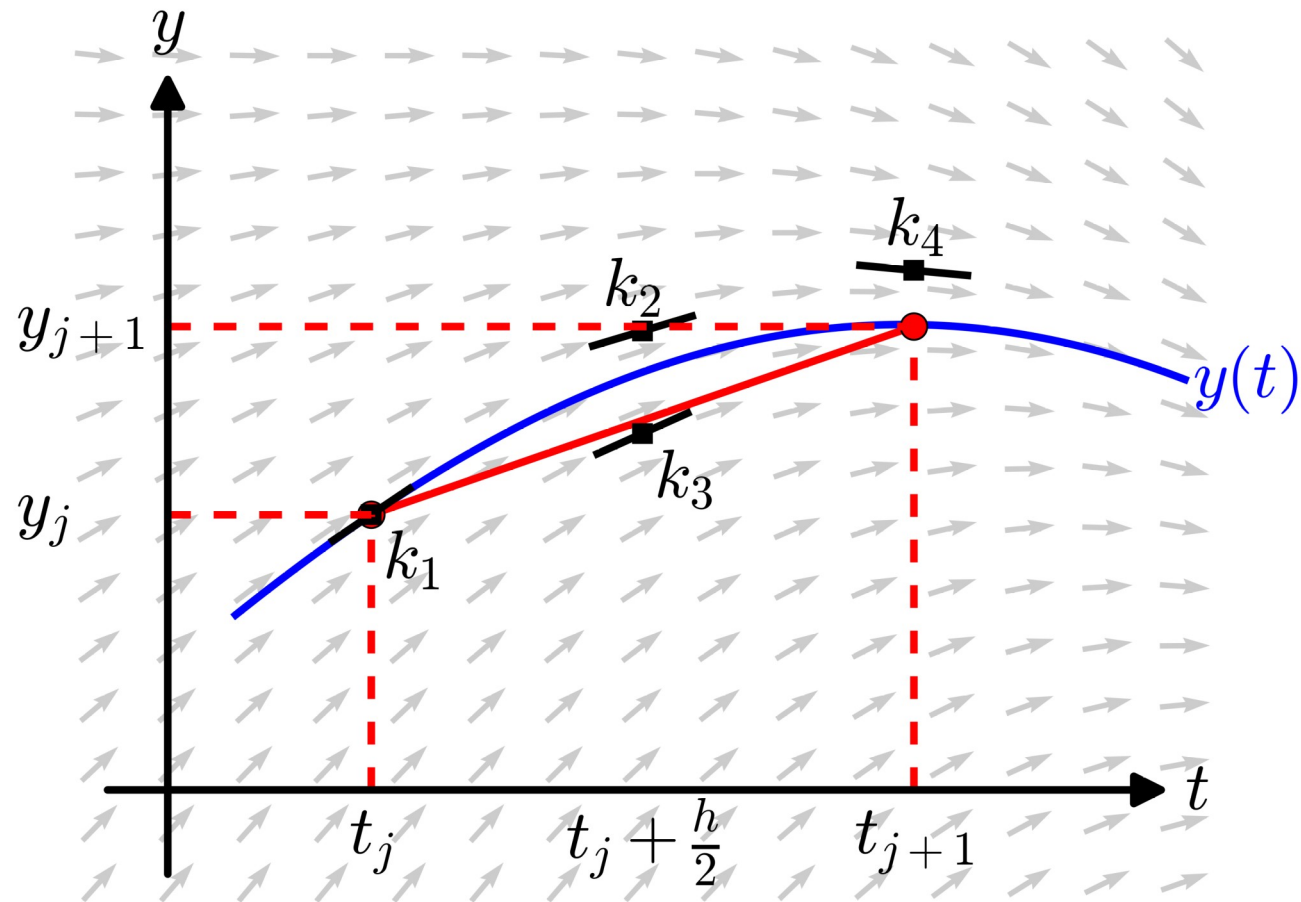
Verbessertes Euler



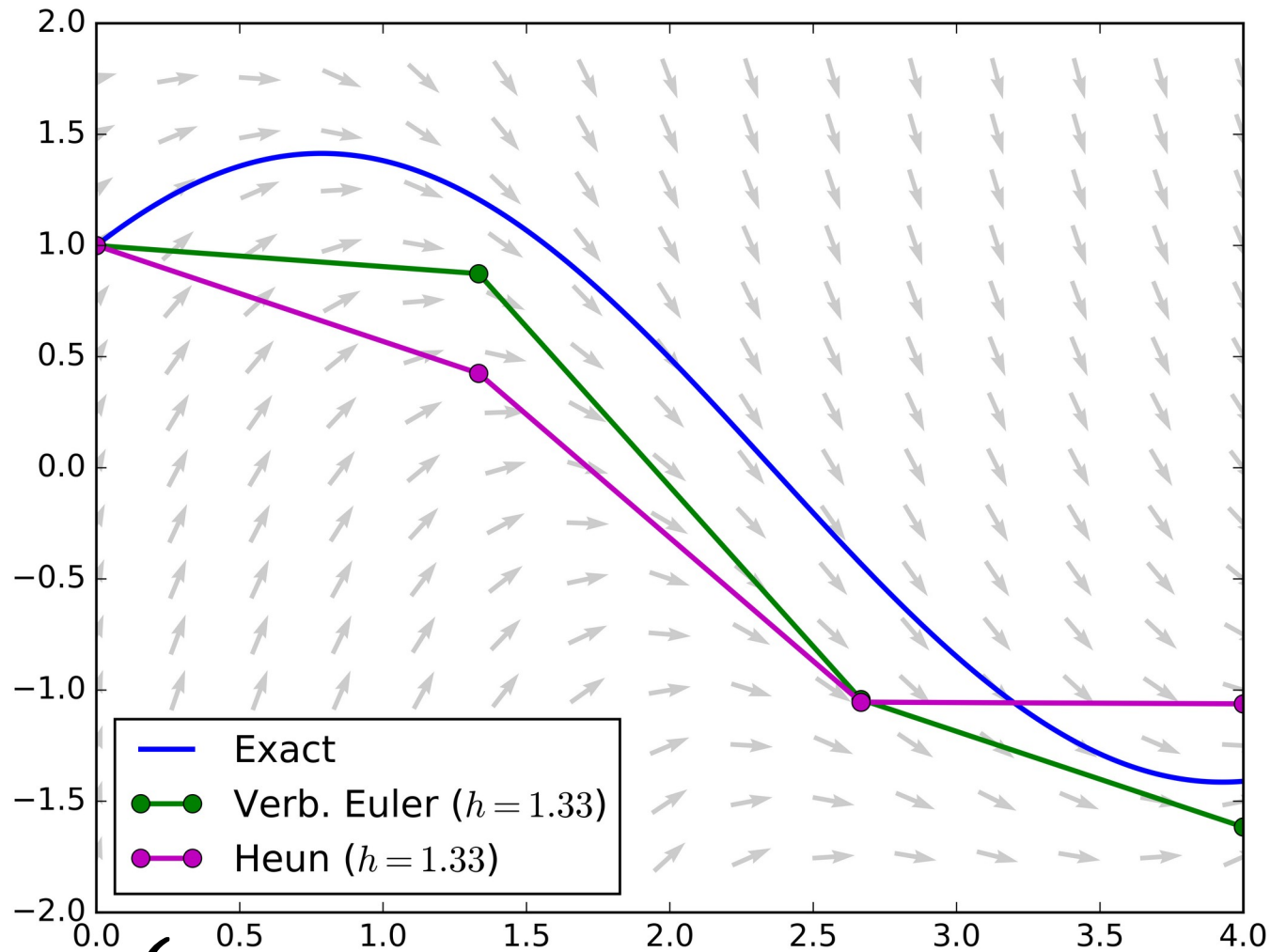
Heun's Methode



DIE Runge-Kutta Methode

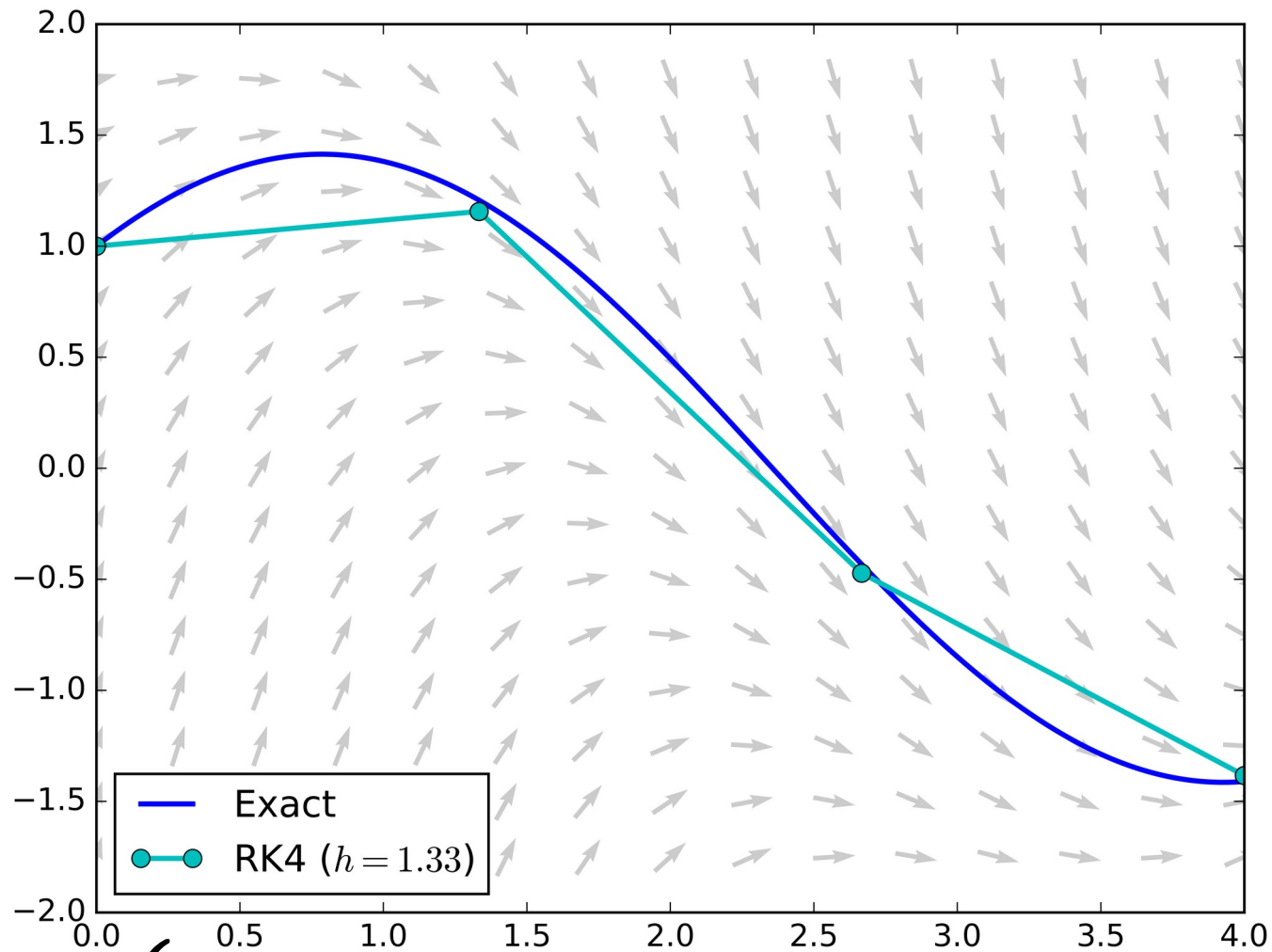


Verb. Euler & Heun



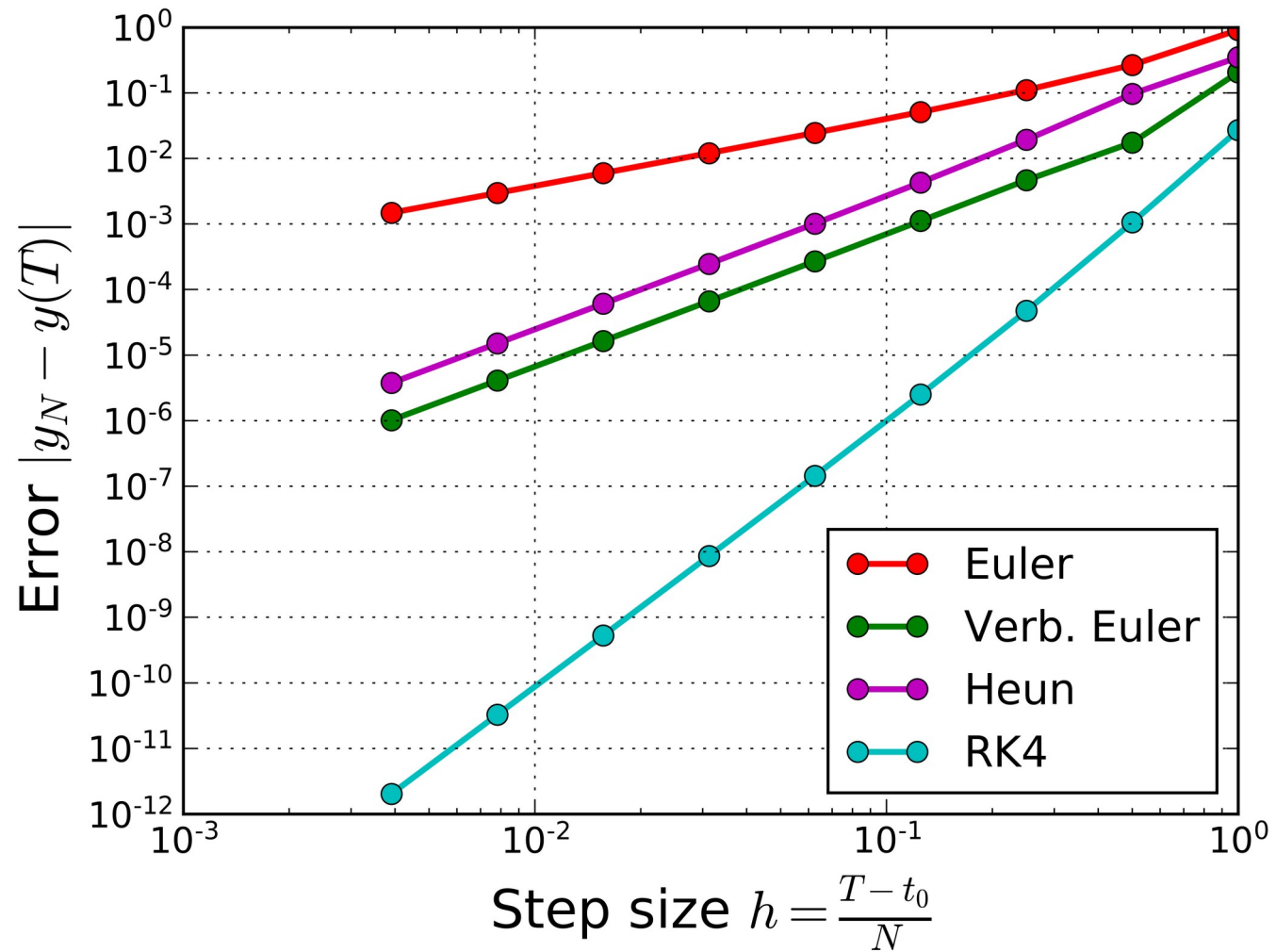
$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = -y(t) + 2 \cos(t) \\ y(t_0 = 0) & = 1 \end{cases}$$

DIE Runge-Kutta Methode



$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = -y(t) + 2 \cos(t) \\ y(t_0 = 0) & = 1 \end{cases}$$

Fehler



(13) Allgemeines 3-stufiges explizites RK

c_1			
c_2	a_{21}		
c_3	a_{31}	a_{32}	
	b_1	b_2	b_3

Durch Entwickeln der Verfahrensfunktion und Vergleich mit der exakten Entwicklung erhält man folgende Bedingungen:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

1. Ordnung

$$b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 1/2$$

2. Ordnung

$$a_{21} b_2 + (a_{31} + a_{32}) b_3 = 1/2$$

$$b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = 1/3$$

$$a_{21} b_2 c_2 + (a_{31} + a_{32}) b_3 c_3 = 1/3$$

$$a_{21}^2 b_2 + (a_{31} + a_{32})^2 b_3 = 1/3$$

3. Ordnung

$$a_{21} b_2 c_1 + a_{31} b_3 c_1 + a_{32} b_3 c_2 = 1/6$$

$$a_{21} a_{32} b_3 = 1/6$$

Satz II.3: Falls die rechte Seite der DGL $\vec{f}(t, \vec{y})$ und die Verfahrens-funktion $\vec{\phi}(t, \vec{y}, t)$ Lipschitz-stetig in \vec{y} sind, dann gilt für das ESV folgende (globale) Fehlerabschätzung

$$\epsilon = \max_{j=0, \dots, N} \|\vec{y}(t_j) - \vec{y}_j\|$$
$$\leq \left(\underbrace{\|\vec{y}(t_0) - \vec{y}_0\|}_{\text{AKV Fehler}} + \sum_{j=1}^N \underbrace{\|\vec{e}_j\|}_{\text{fehler in jedem Schritt}} \right) \cdot e^{\tilde{L}(t_N - t_0)}$$

summierem sich
schlimmstenfalls

wobei \tilde{L} die Lipschitz-Konstante der Verfahrens-funktion $\vec{\phi}$ ist.