# III. Adaptive Schrittweitensteuerung

**Ziel:** Eine gewünschte Genauigkeit erreichen mit möglichst wenig (Rechen-) Aufwand (Effizienz!) ⇝ adaptive Schrittweite $h \rightsquigarrow h_j$

- Fehlerabschätzungen & Toleranzen (abs., rel.)
- Schrittweitenhalbierung & Eingebettete RK-Verfahren
- Adaptive Schrittweitensteuerung

**Wozu:** Praxis relevant!

## III.1 Fehlerbetrachtungen und Toleranzen

Gegeben ein skalares AWP (der Einfachheit halber!)

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$

$$y(t_0) = y_0$$

für $t \in [t_0, T]$.

Wir wollen dieses AWP näherungsweise bis auf eine Genauigkeit / Toleranz mit möglichst wenigen Integrationsschritten lösen

$$\epsilon = \max_{j=0,\dots,N} |y(t_j) - y_j| < TOL$$

($y(t_j)$: exakt, $y_j$: approx. Lösung)

Dieses Problem ist nicht mehr ganz so "einfach" zu behandeln wie bei der Quadratur weil gemachte Fehler sich verstärken können...

Satz II.3 gibt uns die Abschätzung

$$\epsilon \leq \left( |y(t_0) - y_0| + \sum_{j=1}^{N} |e_j| \right) \cdot e^{L(T-t_0)} < TOL$$

Fehler in AW — LDF — "vernachlässigen"

Also

$$\sum_{j=1}^{N} |e_j| < TOL$$

$$|e_1| + \ldots + |e_j| + \ldots + |e_N| < TOL$$

global

<u>Idee:</u> Wähle $|e_j| < tol$ ← lokal

Damit $\sum_{j=1}^{N} |e_j| = N \cdot tol < TOL$

?

<u>Problem:</u> Wir kennen die Anzahl Schritte $N$ nicht im voraus!

Bei äquidistanter Schrittweite gilt

$$h = \frac{T - t_0}{N} \quad \rightsquigarrow \quad N = \frac{T - t_0}{h}$$

Damit liegt nahe

$$\frac{T - t_0}{h_j} \cdot tol_j \approx TOL$$

Schrittweite im j-ten Schritt

$$tol_j \approx h_j \cdot \frac{TOL}{T - t_0}$$

Also wähle $h_j$ so, dass

$$|e_j| \lesssim tol_j \qquad (TKA)$$

Soweit so gut, aber es stellt sich dennoch die Frage ob die Vernachlässigung des exponentiellen Faktors eine gute Idee war...

I.A. NEIN !

D.h. es ist i.A. schwierig (bzw. unmöglich) von den LDF$_n$ auf die GDF$_n$ zu schliessen

Deshalb könnte man auch einfach nur die lokalen Fehler mit lokalen Toleranzen kontrollieren, z.B.

$$|e_j| \lesssim atol \qquad (\text{absolut}) \qquad (TK2)$$

$$|e_j| \lesssim |y_{j-1}| \cdot rtol \qquad (\text{relativ}) \qquad (TK3)$$

$$|e_j| \lesssim atol + |y_{j-1}| \cdot rtol \qquad (\text{abs. + rel.}) \qquad (TK4)$$

Bem.: Es gibt keine Garantie, dass die Näherungs-Lösung die gewünschte Genauigkeit hat! In der Praxis liefert die adaptive Schrittweitensteuerung häufig dennoch gute Resultate.

## III.2 Lokale Fehlerschätzer

Nun müssen wir die LDF $e_j$ lokal Schätzen. Für diese haben wir die a priori Fehlerschätzer (s. II.4)

$$|e_j| = |y(t_j) - y(t_{j-1}) - h_j \cdot \phi(t_{j-1}, y(t_{j-1}), h_j)|$$
$$= \mathcal{O}(h_j^{p+1}) = C \cdot h_j^{p+1}$$

Für ein ESV der KO p.

In der Konstanten C stecken höhere Ableitungen der (uns unbekannten!) Lösung. Deshalb, wie schon bei der adaptiven Quadratur, sind diese a priori Fehlerschätzer nicht direkt brauchbar.

Idee: Vergleiche das Resultat eines Verfahrens mit dem Resultat eines genaueren Verfahren (sog. Kontroll-Verfahren (KV))

Wie bei der adaptiven Quadratur überlegt man sich folgende Möglichkeiten.

## III.2.1 Schrittweitenhalbierung

Gegeben ein Verfahren der KO $p$, berechne im $j$-ten Schritt ein Schritt mit Schrittweite $h$

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot \phi(t_j, y_j, h)$$

und 2 Schritte mit halber Schrittweite $\frac{h}{2}$ (KV)

Hut für KV!

$$\hat{y}_{j+1/2} = y_j + \frac{h}{2} \cdot \phi(t_j, y_j, h/2)$$

$$\hat{y}_{j+1} = \hat{y}_{j+1/2} + \frac{h}{2} \phi(t_{j+1/2}, \hat{y}_{j+1/2}, h/2)$$

$t_j + h/2$

Der LDF ist dann

$$|e_{j+1}| = |y(t_{j+1}) - y_{j+1}| = C \cdot h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

Lösung mit AW $y_j$

und

$$|\hat{e}_{j+1}| = |y(t_{j+1}) - \hat{y}_{j+1}| = 2 \cdot C \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

nach Satz II.3

$$= \frac{1}{2^p} C \cdot h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

$$\approx \frac{|e_{j+1}|}{2^p}$$

03.05.21

Nun wollen wir $|e_{j+1}|$ und $|\hat{e}_{j+1}|$ in Verbindung mit der Differenz der Resultate $|\hat{y}_{j+1} - y_{j+1}|$ bringen:

+0 Trick

$$|e_{j+1}| = |y(t_{j+1}) - \hat{y}_{j+1} + \hat{y}_{j+1} - y_{j+1}|$$

$\Delta$-UG.

$$\leq \underbrace{|y(t_{j+1}) - \hat{y}_{j+1}|}_{\frac{|e_{j+1}|}{2^p}} + |\hat{y}_{j+1} - y_{j+1}|$$

Auflösen nach $|e_{j+1}|$

$$\rightsquigarrow |e_{j+1}| \approx \frac{2^p}{2^p - 1} |\hat{y}_{j+1} - y_{j+1}| = \mathcal{E}_{j+1}$$

Schätzungen!

und

$$|\hat{e}_{j+1}| \approx \frac{1}{2^p - 1} |\hat{y}_{j+1} - y_{j+1}| = \hat{\mathcal{E}}_{j+1}$$

Dies sind dann wieder sog. a posteriori Fehlerschätzer.

Bsp.: (1) Euler mit $h$ + Euler mit $h/2$

(2) Heun ~ + Heun ~

## III.2.2 Eingebettete RK-Verfahren

Der Fehler wird geschätzt durch Vergleich eines Verfahrens der KO p mit einem Verfahren höherer KO, z.B. p+1, (das KV).

Um dies effizient zu berechnen, (d.h. mit möglichst wenigen Auswertungen der rechten Seite f) verwendet man sog. eingebettete RK-Verfahren mit Butcher-Tableaux der Form

$$\begin{array}{c|ccccc} c_1 & & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} & \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s \\ \hline & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \cdots & \hat{b}_{s-1} & \hat{b}_s \end{array} \quad \leftarrow \text{KV}$$

Bsp.: (3) Euler + Heun Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Euler} \\ \\ \leftarrow \text{Heun} \end{array}$$

(4) Dormand und Prince Verfahren (MATLAB ode45)

Der a posteriori Fehlerschätzer ist dann

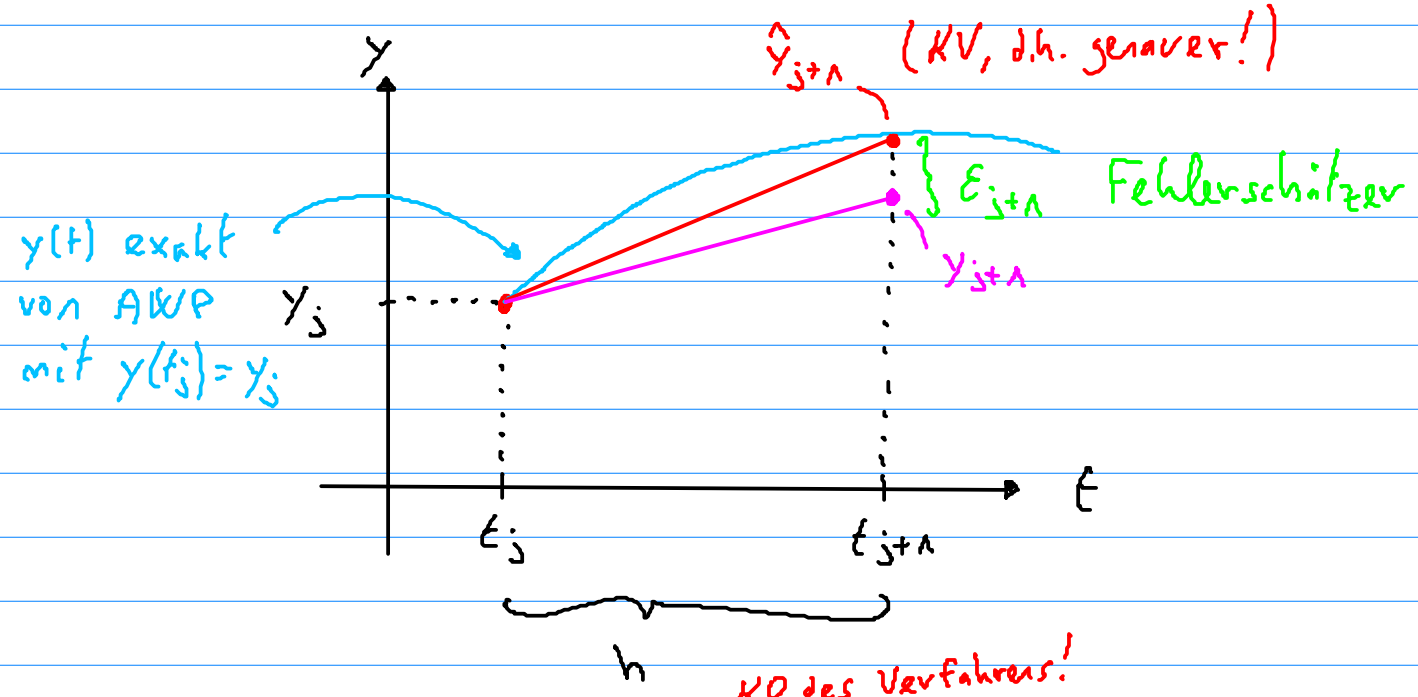
$$|e_{j+1}| \approx |\hat{y}_{j+1} - y_{j+1}| = \varepsilon_{j+1}$$

Bem.: Hier haben wir nur ein Fehlerschätzer für das weniger genaue Verfahren (D.h. kein Schätzer für $\hat{e}_{j+1}$ des KVs!)

## III.3 Adaptive Schrittweitensteuerung

Ziel: Wähle Schrittweite klein genug um gewünschte lokale Präzision zu erreichen und gross genug um effizient zu sein

Ausgangslage im j-ten Schritt




haben: $\varepsilon_{j+1} \approx C \cdot h^{p+1} \rightsquigarrow C \approx \dfrac{\varepsilon_{j+1}}{h^{p+1}}$ (KO des Verfahrens!)

wollen: $tol_{j+1} \approx C \cdot H^{p+1} \rightsquigarrow H \approx h \cdot \left( \dfrac{tol_{j+1}}{\varepsilon_{j+1}} \right)^{1/p+1}$

$H$ ist ein Schrittweiten-Vorschlag um

$$\varepsilon_{j+1} \approx tol_{j+1}$$

zu erreichen.

Frage: ① Wenn $\varepsilon_{j+1} > tol_{j+1}$, ist

$$H < h$$

② Wenn $\varepsilon_{j+1} < tol_{j+1}$ ? $H > h$

Daraus überlegt man sich folgende adaptive Schrittweiten-Wahl

"Sicherheits"-Faktor

$$H = h \cdot \min\left( facmax, \max\left( facmin, fac \cdot \left(\frac{tol}{\varepsilon}\right)^{1/p+1} \right)\right)$$

begrenzte Vergrösserung

begrenzte Verkleinerung

# Adaptive Schrittweitensteuerung (~MATLAB Pseudo-Code)

```
function [t,y] = adapt_ode(...)
    j   = 0
    h   = h0
    tol = atol + |y0|·rtol
    ε   = tol
    while (tj < T)
        h = h·min(facmax, max(facmin, fac·(tol/ε)^(1/(p+1))))
        ("Details" zu h wie Übung)
        y_{j+1} = yj + ...
        ŷ_{j+1} = yj + ...        mit h-Halb.-Methode
        ε = |y_{j+1} − ŷ_{j+1}|   oder ε̂ = ... / (TK5)
        tol = atol + max(|yj|, |ŷ_{j+1}|)·rtol
        if (ε < tol)              (TK1...4 auch möglich)
            t_{j+1} = tj + h
            y_{j+1} = ŷ_{j+1}     ← Nehmen das KV!
            j = j+1
        end
    end
end
```

Parameter

Bem.: (i) Es wird stets das genauere Resultat $\hat{y}_{j+1}$ genommen. Obwohl man im Fall eines eingebetteten RK-Verfahren eigentlich keinen Fehlerschätzer $\hat{\varepsilon}_{j+1}$ hat.

(ii) Es gibt keine Garantie, dass der globale Fehler $E < tol$ ist !

10.05.21