Dr. R. Käppeli
M. Petrella

Serie 3

1. Konvergenzordnung summierter Quadraturformeln

a) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

`y = summtrapezregel(f,a,b,N),`

die das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der summierten Trapezregel approximiert. Der Input `N` entspricht der Anzahl von Teilintervallen, in die das Interval $[a, b]$ unterteilt wird.

b) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

`y = summsimpsonregel(f,a,b,N),`

die das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der summierten Simpsonregel approximiert.

c) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

`y = summ2punktgauss(f,a,b,N),`

die das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der summierten 2 Punkte Gauss Quadraturformel approximiert.

d) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

`summbestimmeordnung,`

die die Ordnung einer summierten Quadratur bestimmt. Bestätigen Sie, dass die summierte Trapezregel die algebraische Konvergenzordnung 2 besitzt und dass die summierte Simpsonregel und die 2 Punkte Gauss Quadraturformel die algebraische Konvergenzordnung 4 besitzen.

e) Wiederholen Sie den Konvergenztest von Teilaufgabe d) für die Trapezregel mit dem Integrand

$$f_1(x) = x^5,\ f_2(x) = \sqrt{x-a},\ f_3(x) = (x-a)^{5/2},$$

und die MATLAB Funktion definiert in `f_4.m`. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Bitte wenden!

f) Bestimmen Sie für jedes Verfahren die Anzahl von Funktionsauswertungen.

Hinweis: Siehe Beispiel (13) in den Vorlesungsnotizen welche auf der Vorlesungshomepage zu finden sind.

2. *3-Punkte Gauss Quadraturregel*

In dieser Aufgabe wollen wir die berühmte 3-Punkte Gauss Quadraturregel $G_2[f]$ herleiten.

a) Berechnen Sie die Quadratur Knoten von $G_2[f]$ in dem Sie die Nullstellen des Legendre-Polynoms dritten Grades $P_3(x)$ bestimmen.
Hinweis: Zur Berechnung der Gewichte können Sie die Formel in den Vorlesungsnotizen verwenden:

$$\omega_k = \frac{2(1-x_k^2)}{((j+1)P_j(x_k))^2}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

b) Bestätigen Sie, dass $G_2[f]$ Ordnung 6 hat.

c) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

```
y = summ3punktgauss(f,a,b,N),
```

die das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der summierten 3-Punkte Gauss Quadraturformel approximiert.

d) Wiederholen Sie den Konvergenztest von Serie 3 Aufgabe **1d)** für $G_2[f]$ mit den Integranden

$$f_1(x) = x\cos(x) \quad \text{und} \quad f_2(x) = (x-a)^{7/3}$$

mit $a = \sqrt{2}$ auf dem Intervall $[\sqrt{2}, \pi]$. Was beobachten Sie?

Hinweis: Siehe Beispiel (13) in den Vorlesungsnotizen welche auf der Vorlesungshomepage zu finden sind.

3. *Konvergenz*

In der numerischen Mathematik spricht man von algebraischer und exponentieller Konvergenz einer Methode, falls der Fehler der Methode sich wie

$$E(N) = CN^{-\alpha} \qquad \text{bzw.} \qquad E(N) = Cq^N$$

verhält für N gross genug. Hier sind C und α positive Konstanten, $q \in (0,1)$ und N entspricht einem Methodenparameter (z.B. die Anzahl Teil-Intervalle einer summierten Quadraturregel oder den Genauhigkeitsgrad/Ordnung einer Quadraturregel).

Siehe nächstes Blatt!

a) Die MATLAB -Funktion `Konvergenz` berechnet Approximationen des bestimmten Integrals

$$I_i = \int_0^1 f_i(x)dx, \qquad i = 1, 2, 3,$$

wobei

$$f_1(x) = \cosh(x), \qquad f_2(x) = \sqrt{x}, \qquad f_3(x) = \arcsin(x)$$

mittels Gauss-Legendre Quadratur und plottet die Quadraturfehler als Funktion der Anzahl Knoten der Quadraturregel. Beschreiben Sie welche Art von Konvergenz für f_1, f_2 und f_3 vorliegt und bestimmen Sie im Falle algebraischer Konvergenz die Ordnung α und im Falle exponentieller Konvergenz die Rate q.

b) Manchmal kann man durch eine geschickte (analytische) Manipulation des Integranden eine wesentliche Verbesserung des Konvergenz-Verhalten erreichen. Das Integral I_3 aus **a)** kann durch die Substitution $y = \arcsin(x)$ auf folgendes transformiert werden

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos(y)dy \quad (\equiv I_3).$$

Beschreiben Sie nun welche Art von Konvergenz vorliegt und bestimmen Sie im Falle algebraischer Konvergenz die Ordnung α und im Falle exponentieller Konvergenz die Rate q.

c) Nun wiederholen wir **a)** und **b)** mit den Newton-Cotes Quadraturregeln. Führen Sie hierzu die MATLAB -Funktion `Konvergenz_newcot` aus.
Was beobachten Sie?

4. *Gauss Quadratur mit Gewichtsfunktionen*

Wir wollen Integrale der Form

$$I[f] = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \tag{1}$$

mittels Quadratur approximieren. Hierzu bauen wir die Gauss Quadratur mit der Gewichtsfunktion

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}. \tag{2}$$

a) Berechnen Sie die ersten drei orthogonal Polynome bezüglich dem gewichteten Skalarprodukt,

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 w(x)f(x)g(x)dx. \tag{3}$$

Bitte wenden!

Hinweis: Ausgehend von der Monombasis $v_j(x) = x^j$, bilden Sie eine Orthogonalbasis $p_j(x)$ bezüglich obigem gewichteten Skalarprodukt (3) mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren,

$$p_k(x) = v_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle v_k, p_j \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle} p_j(x) \tag{4}$$

b) Mit Ihrer in a) berechneten Orthogonalbasis bezüglich dem obigem gewichteten Skalarprodukt (3) bestimmen Sie die zwei-Punkte Gauss Quadratur für die Gewichtsfunktion $w(x)$.

Hinweis: Die Gewichte sind gegeben durch

$$w_j = \int_0^1 w(x)\, L_j^1(x)\, dx \quad (j = 0, 1),$$

wobei $L_j^1(x)$ $(j = 0, 1)$ die Lagrange-Polynome zu den Knoten $x_{0,1}$ sind. Die Knoten sind die Nullstellen des in **a)** berechneten Orthogonalpolynom.

c) Was ist der Vorteil Ihrer Quadratur aus b) gegenüber der Trapezregel für Integrale der Form (1) ?

Abgabe: Bis Freitag, den 19.03.2021.
Laden Sie Ihre MATLAB -Programme und eingescannte, fotografierte oder direkt digitale schriftlichen Ergebnisse (Dateigrösse $<$ 25MB) unter `sam-up.math.ethz.ch` hoch.