

Serie 6

1. Lipschitz-Stetigkeit

- a) In der Vorlesung haben wir gesehen, dass es eine entscheidende Rolle für die eindeutige Lösbarkeit des AWP's spielt, ob die rechte Seite f Lipschitz-stetig ist oder nicht. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, ein besseres Gefühl für das Konzept der Lipschitz-Stetigkeit zu bekommen.

Sind die folgende Funktionen (lokal) Lipschitz stetig auf dem Intervall $[-1, 1]$? Begründen Sie Ihre Antworten.

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = |x|, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0, \\ -1 & x \geq 0, \end{cases} \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2}.$$

- b) Erfüllen die folgenden AWP's die Voraussetzungen von Picard-Lindelöf?

- $\dot{y}(t) = y(t)^2, \quad y(0) = 0.5$
- $\dot{y}(t) = |y(t)|, \quad y(0) = 0$
- $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)^2}, \quad y(0) = 0.5$
- $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)^2}, \quad y(0) = 0$
- $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)^2}, \quad y(t_0) = 0, \quad t_0 = 1$

2. Trajektorie bei Streuung

Die Trajektorie eines Teilchens bei Streuung an einem Potential $U(x, y)$ wird beschrieben durch:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U \quad (1)$$

wobei $\mathbf{r} = (x, y)^T$ die Teilchenkoordinaten sind und U das Lennard-Jones Potential:

$$U(x, y) = 4 \left(\left(\frac{1}{r} \right)^{12} - \left(\frac{1}{r} \right)^6 \right)$$

ist und $r^2 = x^2 + y^2$. Dieses Potential beschreibt die Wechselwirkung zwischen ungeladenen und chemisch nicht aneinander gebundenen Atomen und es wird häufig in Molekulardynamik Simulationen verwendet. Der Einfachheit halber setzen wir die Masse des Teilchens $m = 1$.

Bitte wenden!

- a) Schreiben Sie Gl. (1) als System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.
- b) Lösen Sie mit Ihrer `expEuler` Routine aus Aufgabe 1 der Serie 5 das System a) für folgende Anfangswerte:

$$\mathbf{r} = (-10, b)^T, \quad \text{wobei } b = 0.25, 0.75, 1.25, 1.75, 2.25,$$

$$\dot{\mathbf{r}} = (1, 0)^T$$

Verwenden Sie $N = 1000$ Schritte und plotten Sie die 5 Trajektorien.

Hinweis 1: Verwenden Sie die Templates `streuung.m` und `fstreuung.m` als Funktion für Ihre rechte Seite der Diff.-Gl. aus a).

Hinweis 2: Ihr Plot der Trajektorien sollte Abb. 1 ähneln.

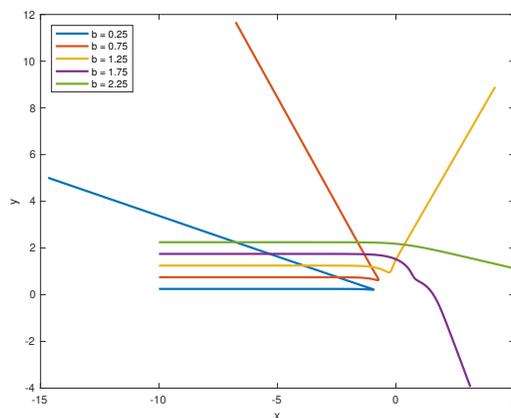


Abbildung 1 – Teilchen Trajektorien.

3. Verbesserte Polygonzugmethode von Euler¹

In dieser Aufgabe wollen wir eine Verbesserung gegenüber der Euler Methode implementieren und seine Qualität empirisch untersuchen. Die verbesserte Polygonzugmethode von Euler ist gegeben durch

$$k_1 = f(t_k, y_k),$$

$$k_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right), \quad (2)$$

$$y_{k+1} = y_k + hk_2.$$

- a) Skizzieren Sie dieses Verfahren im Richtungsfeld.

¹Wir werden diese Methode im Detail am Montag 12. April in der VL besprechen.

b) Implementieren Sie dieses Verfahren.

Hinweis: Arbeiten Sie im Template `verbEuler.m`.

c) Berechnen Sie mit (2) approximative Lösungen von den folgenden AWP

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t), \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = (y(t))^2, \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

zum Zeitpunkt $T = 1$ mit $N = 2^i$ ($i = 3, 4, \dots, 9$) Schritten. Bestimmen Sie den absoluten Fehler zur Endzeit $|y_N - y(T)|$ und plotten Sie diesen Fehler als Funktion von $h = 1/N$ in einem `loglog`-plot. Bestimmen Sie dann die Steigung der Gerade mithilfe des Befehls `polyfit`.

Hinweis: Die exakten Lösungen zu den AWP wurden in der Vorlesung angegeben. Arbeiten Sie im Template `konvOrdnungEmpirisch.m`.

4. Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert

Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \lambda \left(y(t) - \frac{t^2}{1+t^2} \right) + \frac{2t}{(1+t^2)^2}, \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

für $0 \leq t \leq 2$ und $\lambda = 10$.

a) Überprüfen Sie, dass die exakte Lösung gegeben ist durch $y(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$.

b) Lösen Sie das AWP mit der verbesserten Polygonzugmethode von Euler aus Aufgabe 3. Verwenden Sie $N = 2 \times 10^i$ ($i = 2, 3, 4, 5$) Schritte und plotten Sie die genäherten Resultate gemeinsam mit der exakten Lösung. Interpretieren Sie die Resultate.

Hinweis: Betrachten Sie einen leicht gestörten Anfangswert: $y(t_0) = \epsilon + \frac{t_0^2}{1+t_0^2}$.

c) Wiederholen Sie b) mit $\lambda = -10$. Erklären Sie das beobachtete Verhalten.

Abgabe: Bis Freitag, den 23.04.2021.

Laden Sie Ihre Matlab-Programme und eingescannte, fotografierte oder direkt digitale schriftlichen Ergebnisse (Dateigröße < 25MB) unter `sam-up.math.ethz.ch` hoch.