Dr. R. Käppeli
M. Petrella

Lösung 7

1. *Butcher-Tableaux*

a) Das Verfahren ist explizit und hat folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{array}$$

Im Richtungsfeld sieht es wie oben links in Abb. 1 skizziert aus.

b) Das Verfahren ist explizit und hat folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Im Richtungsfeld sieht es wie oben rechts in Abb. 1 skizziert aus.

c) Das Verfahren ist explizit und hat folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{array}$$

Im Richtungsfeld sieht es wie unten links in Abb. 1 skizziert aus.

d) Das Verfahren ist implizit und hat folgendes Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

Im Richtungsfeld sieht es wie unten rechts in Abb. 1 skizziert aus. In der Literatur ist es bekannt als das *implizite Mittelpunkts- Verfahren*.

Bitte wenden!

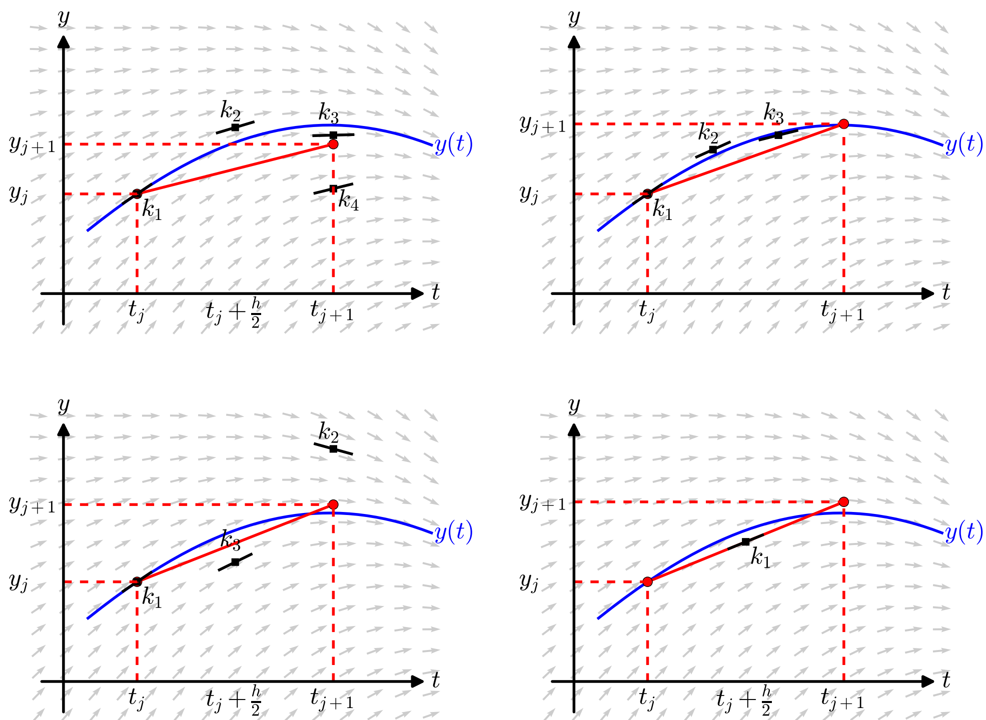

Abbildung 1 – Skizze der Verfahren im Richtungsfeld.

2. **a)** Wir haben

$$
\begin{aligned}
I[1] &= \int_0^1 1 dx = 1, \\
I[x] &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \\
I[x^2] &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},
\end{aligned}
$$

und für die Quadraturformel $Q[g]$

$$
\begin{aligned}
Q[1] &= \frac{1}{2}(1+1) = 1 \Rightarrow \checkmark \\
Q[x] &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \checkmark \\
Q[x^2] &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = \frac{5}{16} \Rightarrow ✗
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Linearität der Regel folgt dann aus der Exaktheit für die Monome 1 und x, dass die Regel auch exakt ist für allgemeine lineare Polynome $\alpha_0 + \alpha_1 x$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Wir betrachten das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$. Durch Integration erhalten wir

$$y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))ds.$$

Wir wenden dann unsere Quadraturformel auf das Integral für $t_1 = t_0 + h$ an und erhalten

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))ds \approx \frac{h}{2}\left(f\left(t_0 + \frac{h}{4}, y\left(t_0 + \frac{h}{4}\right)\right) + f\left(t_0 + \frac{3h}{4}, y\left(t_0 + \frac{3h}{4}\right)\right)\right).$$

Wir approximieren $y\left(t_0 + \frac{h}{4}\right)$ und $y\left(t_0 + \frac{3h}{4}\right)$ mithilfe des expliziten Eulerverfahrens

$$\begin{aligned} y\left(t_0 + \frac{h}{4}\right) &\approx y_0 + \frac{h}{4} f(t_0, y_0), \\ y\left(t_0 + \frac{3h}{4}\right) &\approx y_0 + \frac{3h}{4} f(t_0, y_0), \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{cases} k_1 := & f(t_0, y_0), \\ k_2 := & f\left(t_0 + \frac{h}{4}, y_0 + \frac{h}{4}k_1\right), \\ k_3 := & f\left(t_0 + \frac{3h}{4}, y_0 + \frac{3h}{4}k_1\right), \\ y_1 := & y_0 + \frac{h}{2}(k_2 + k_3). \end{cases}$$

c) Siehe `quadraturRK.m` und `konvergenzRK.m`. Wir beobachten eine Konvergenzordnung von $1.99 \approx 2$.

3. **a)** Ein Schritt des Verfahrens is gegeben durch

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_k, y_k\right), \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f\left(t_k + h, y_k + hk_3\right), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right). \end{aligned}$$

b) Siehe `klassischeRK.m`.

c) Siehe `konvergenzRK.m`. Wir beobachten eine Konvergenzordnung von $3.98 \approx 4$.

4. **a)** Wir haben

$$
\begin{aligned}
-2ty^2 &= -2(t_j+h)\left(y_j + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \dots\right)^2 \\
&= -2(t_j+h)\left(y_j^2 + 2c_1 y_j h + (c_1^2 + 2c_2 y_j)h^2 + (2c_1c_2 + 2c_3 y_j)h^3 + \dots\right) \\
&= \underbrace{\left(-2t_j y_j^2\right)}_{c_1} + \underbrace{\left(-2y_j^2 - 4c_1 t_j y_j\right)}_{2c_2} h + \underbrace{\left(-4c_1 y_j - 2t_j(c_1^2 + 2c_2 y_j)\right)}_{3c_3} h^2 \\
&+ \underbrace{\left(-2(c_1^2 + 2c_2 y_j) - 4t_j(c_1c_2 + c_3 y_j)\right)}_{4c_4} h^3 + \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -2t_j y_j^2 \\
c_2 &= -y_j^2 - 2c_1 t_j y_j \\
c_3 &= \frac{1}{3}\left(-4c_1 y_j - 2t_j(c_1^2 + 2c_2 y_j)\right) \\
c_4 &= -\left(\frac{c_1^2}{2} + c_2 y_j + t_j(c_1 c_2 + c_3 y_j)\right)
\end{aligned}
$$

b) Siehe `run_taylorreihenmethode.m` und `taylorreihenmethode.m`.